

Studienort Wilhelmshaven

Institut für Energie-
Verfahrens- und
Umwelttechnik

Beitrag zur mathematisch-physikalischen Modellierung von Freistrahlanlagen für die Gewässerbelüftung (Teil 1)

Inhalt:

	Seite
1. Einleitung	2
2. Wirkungsweise von Freistrahlanlagen im Gewässer	4
3. Stand der theoretischen Grundlagen zu Freistrahlanlagen	6
4. Allgemeine Grundlagen	9
5. Zielstellung	14
6. Weiterentwicklung des mathematisch-physikalischen Modells	14
7. Exemplarische Berechnungen von Bahnkurven mit MathCad	25
8. Schlussfolgerungen aus den Beispielberechnungen	36
9. Zusammenfassung	37
10. Symbolverzeichnis	39
11. Literatur	40
12. Anhang	42

Erstellt von: Prof. Dr.-Ing. Bernhard Winter
Jade Hochschule, Studienort Wilhelmshaven
Fachbereich Ingenieurwissenschaften
Institut Energie- Verfahrens- und Umwelttechnik (EVU)

Friedrich-Paffrath-Str. 101
26389 Wilhelmshaven

E-Mail.: bernhard.winter@jade-hs.de
Internet.: <http://www.jade-hs.de/?d=8326>

Erstveröffentlichung: April 2012

1. Einleitung

Die mathematisch-physikalische Modellierung von verfahrenstechnischen Systemen und Prozessen basiert im Allgemeinen auf der Grundlage von Stoff-, Energie- und Impulsbilanzen in Verbindung mit der Prozesskinetik /1/. Dabei ist die Theorie der Maßstabsübertragung mit einzubeziehen. Diese Bilanzgleichungen, die in der Verfahrenstechnik auch als Transportbilanzen bezeichnet werden, münden in die Stoff- (Masse-), Energie- und Impulsstromerhaltungssätze.

Auch im Zeitalter der CFD-Technik und allgemein der numerischen Berechnungsmethoden, z.B. mit Softwarepaketen wie PRO II, ASPEN u.a., spielt dieses Grundlagenwissen der Modellierung schon allein für Plausibilitätsuntersuchungen von deren Lösungen eine wichtige Rolle.

Nach wie vor gilt, dass analytische Lösungen in Form von exemplarischen Beispielen für die Lehre aber auch für viele Anwendungsfälle in der Praxis, bei denen ein spezielles physikalisches Verständnis notwendig ist, eine große Bedeutung haben.

Für spezielle Anwendungsfälle werden meist Lösungen in Verbindung mit vereinfachenden Annahmen erhalten, bei denen einzelne Gleichungen oder auch einzelne Terme in diesen Gleichungen wegfallen können aber auch mathematischen Näherungsverfahren, z.B. die Approximation durch abschnittsweise Berechnung, angewendet werden /2/.

In der vorliegenden Arbeit soll für Freistrahlanlagen ein Beitrag zur weiterführenden mathematisch-physikalischen Modellierung auf den genannten Grundlagen entwickelt werden, um die Freistrahlausbreitung in einem Gewässer nach den physikalischen Gegebenheiten vorausberechnen zu können. In diesem Teil 1 der Arbeit soll idealer Weise die innere Reibung der Strömung, d.h. die Energiedissipation zunächst noch vernachlässigt werden. Erst in einer Folgearbeit Teil 2 wird diese mit einbezogen.

Die Teich-, bzw. die Gewässerbelüftung mit der so genannten Freistrahlschichttechnik wird seit ca. 10 Jahren in der hiesigen Region auf Grund ihrer maschinentechnischen Einfachheit und Zuverlässigkeit angewendet. Unter der Projektleitung von MICHELE und nachfolgend von LÜCKING und mit dem Projektteam ENGEL, SCHELTWORT und LIESEGANG (zeitlich nacheinander) /3/ sind bisher drei Freistrahlanlagen projektiert, gebaut und im Rahmen von Großversuchen in zwei Gewässern der näheren Umgebung eingesetzt worden. Aktuell kommen zwei dieser Anlagen (BANT 1 ab dem Jahr 2008 und BANT 2 ab dem Jahr 2009) im Auftrag der Stadt Wilhelmshaven im Banter See zum Einsatz, um diese Technik bis einschließlich des Jahres 2012 in einer Langzeituntersuchung zur "Bekämpfung der Blaualgenproblematik im Banter See" /4/ anzuwenden. Die jährliche Einsatzzeit liegt dabei von Anfang April bis Mitte Oktober.

Diese Untersuchungen sind noch im Fluss und deshalb kann und soll über die zu erwartenden Ergebnisse an dieser Stelle nicht eingegangen werden.

Das Bild 1 zeigt die Freistrahlanlage BANT 1 mit den Hauptelementen zylindrisches Leitrohr und Propeller sowie mit den Schwimmkörpern /5/.



Bild 1 Freistrahlanlage BANT 1 mit den Hauptelementen zylindrisches Leitrohr und Propeller sowie mit den Schwimmkörpern, Banter See Wilhelmshaven /5/

Im Jahr 2002 ist von MICHELE/MICHELE /6/ eine Arbeit zur Berechnung von Freistrahlanlagen auf der Basis von empirischen Literaturmodellen vorgelegt worden, mit der vom physikalischen und strömungstechnischen Konzept her nur eingeschränkt eine Berechnung der Freistrahlausbreitung im Gewässer möglich ist. Im Abschnitt 3. wird darauf näher eingegangen.

Die Motivation für diese Arbeit ist wie schon erwähnt, die Modellierung von Freistrahlanlagen weiter voranzutreiben. Dadurch soll die Genauigkeit von Vorausberechnungen erhöht und die Risiken beim Betreiben solcher Anlagen reduziert werden. Bei dieser Weiterentwicklung der Theorie der Freistrahlanlagen ist vom mathematisch-physikalischen Grundlagenwissen in Form der genannten Erhaltungssätze auszugehen und es soll die Möglichkeit der Einbeziehung von empirische Untersuchungen zur Strömungskinetik geschaffen werden. Bei der Beschreibung der Strömungsbahnen des Freistrahls im Gewässer sind die allgemeingültigen Gleichungen aus den Teilgebieten der Kinematik, der Translation und des schrägen Wurfes mit einzubeziehen.

Es sollte stets ein Ziel sein, Ergebnisse aus theoretischen Untersuchungen zu Systemen und Prozessen am konkreten Anwendungsfall zu überprüfen. Die Anwendung von Vorausberechnungen zur Freistrahlausbreitung in einem Gewässer würde sich durch den aktuellen Fall im Banter See Wilhelmshaven ergeben. Daher werden in dieser vorliegenden Arbeit Bedingungen und Annahmen getroffen, die diesen Freistrahlanlagen im Banter See weitestgehend entsprechen.

Da jedoch keine direkten Messungen zur Freistrahlausbreitung im Gewässer vorgesehen waren und sind, ist die Überprüfung der theoretischen Ergebnisse aus dieser Arbeit nicht direkt möglich. Allerdings liefern diese theoretischen Ergebnisse tendenzielle Aussagen, die für Anwendung wesentlich sind.

Die Freistrahlanlage BANT 1 (östliche Hälfte des Banter Sees, nahe Grodendamm) hat folgende Parameter /7/:

Durchmesser des Leitrohres:	1,4 m
Länge des Leitrohres:	1,5 m
Neigungswinkel zur Senkrechten:	60 °
Leistungsaufnahme:	1,9 kW
berechneter Volumenstrom:	1 m³/s
Geschwindigkeit im Leitrohr:	0,75 m/s

In dieser Arbeit ist nicht vorgesehen, auf die Komplexität des Gewässers hinsichtlich seines chemisch-physikalischen, Strömungs- und biologischen Verhaltens im jahreszeitlichen Verlauf und im Zusammenhang mit dem Wettergeschehen einzugehen.

Als einziger Messparameter des Gewässers soll hier die Wassertemperaturdifferenz zwischen der Oberfläche und der Tiefe **-9 m** (im folgenden als vertikale Temperaturdifferenz bezeichnet) verwendet werden. Diese vertikale Temperaturdifferenz wird als wichtige Größe für die Einschätzung des Durchmischungszustandes des Gewässers angesehen. Hohe Werte stehen für eine ausgeprägte vertikale Temperaturschichtung und ein Wert von **0 K** für isotherme Bedingungen im Gewässer, d.h. für die Gradientenfreiheit der Temperatur, bzw. für eine vollkommene (ideale) Durchmischung.

2. Wirkungsweise von Freistrahlanlagen im Gewässer

Mit einer Freistrahlanlage wird sauerstoffreiches Oberflächenwasser durch ein im zylindrischen Leitrohr arbeitenden Propeller angesaugt, um als Freistrahlschraube schräg nach unten in tiefere Ebenen des Gewässers geleitet zu werden, wo im Allgemeinen sauerstoffarmes Wasser vorherrscht. Dadurch soll in der Tiefe der Sauerstoffgehalt des Wassers ansteigen, was sich für dortige aerobe Prozesse positiv auswirken wird. Mit diesem Wassertransport von der Oberfläche in die Tiefe wird der Durchmischungszustand des Gewässers erhöht, bzw. Gradienten abgebaut.

Das Prinzip der Freistrahlschraube basiert auf dem geringen Energieeinsatz für den Wassertransport, weil die Freistrahlausbreitung nicht mit hoher Intensität stattfinden muss (/7/, siehe Abschnitt 1). Dadurch wird allerdings auch offensichtlich, dass mit Freistrahlanlagen geringer Leistung keine schnellen, bzw. kurzfristigen Wirkungen auf ein Gewässer erzielt werden können.

Meist laufen in einem Gewässer natürliche chemische und biologische Prozesse relativ langsam ab, weswegen auch der zeitliche Sauerstoffverbrauch gering ist. Außerdem gelten Windereignisse mit der damit verbundenen erzwungenen Konvektion im Gewässer als wichtigste Ursache für den Sauerstoffeintrag und damit auch für eine gute Durchmischung, d.h. für den Gradientenabbau, was bei der Konzeption von Freistrahlanlagen berücksichtigt werden muss.

Die Neigung der Anlage, d.h. die Neigung des Leitrohres kann z.B. über den Winkel β zur Senkrechten oder über den Winkel γ zur Waagerechten ausgedrückt werden (siehe Bild 2).

Im Verlauf der Strömung des Freistrahles wird durch Reibung an dessen Flanken Wasser mitgerissen und in den Freistrahл eingesaugt, so dass der Volumenstrom längs der Strömung ständig zunimmt. Dabei vergrößert sich die Strömungsquerschnittsfläche kegelartig und die Strömungsgeschwindigkeit sinkt.

Außerdem wird davon ausgegangen, dass der Freistrahл stets turbulent ist und auch aus diesem Grunde ein kegelförmiger Strahlverlauf auftritt.

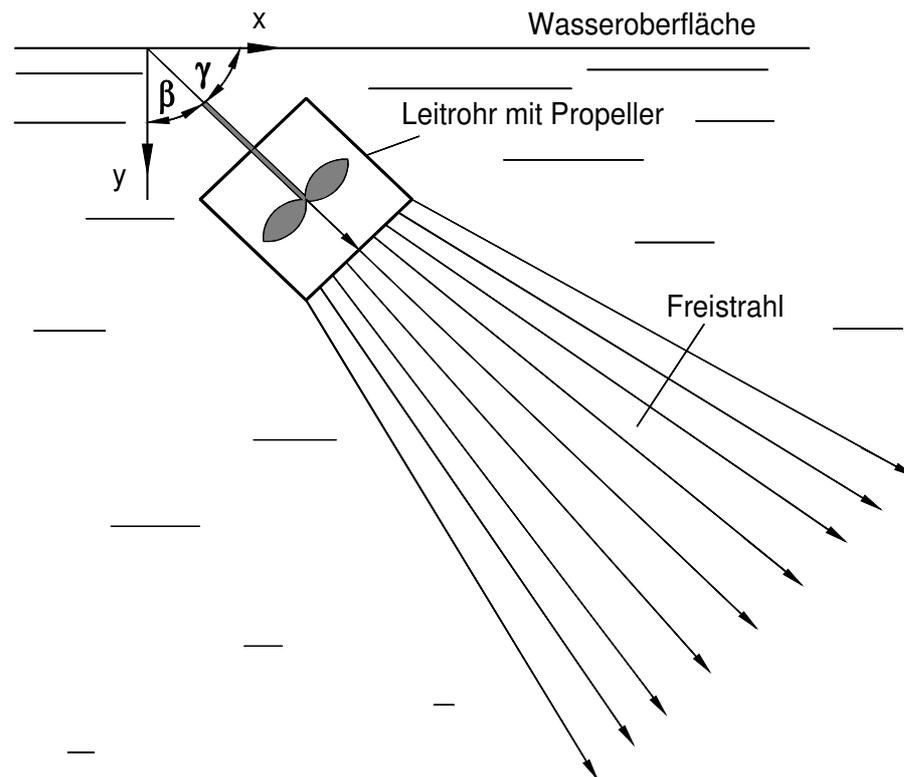


Bild 2 Schema einer Freistrahlanlage mit linearer, kegelförmiger Freistrahlausbreitung in einem Gewässer, isotherme Bedingungen

In der wärmeren Jahreszeit weist das Oberflächenwasser eines Gewässers durch die Sonneneinstrahlung meist eine höhere Temperatur als das in tieferen Ebenen befindende Wasser auf, was auch in entsprechend hohen Werten der vertikalen Temperaturdifferenz zum Ausdruck kommt. Da der Freistrahл aus diesem Oberflächenwasser gespeist wird, wirkt auf ihn in der Tiefe ein Auftrieb, der sein Ablenken nach oben zur Folge haben kann.

Es ist davon auszugehen, dass bei nichtisothermen Bedingungen, also wenn vertikale Temperaturgradienten im Gewässer vorliegen, der Freistrahл eine Bahnkurve durchläuft, dieser unter Umständen sogar die Wasseroberfläche wieder erreicht oder sogar nach einem zweiten Umkehr wieder tieferen Ebenen zuströmt. Temperatur-, bzw. dichtebedingte Bahnkurven des Freistrahls sind auch schon in /5/ festgestellt worden, ohne jedoch in der Modellierung berücksichtigt zu werden.

D.h. nur bei isothermen Bedingungen im Gewässer wird wegen des fehlenden Auftriebes eine lineare Strahlausbreitung wie im Bild 2 die Regel sein. Dieser Sonderfall kann nur in der kalten Jahreszeit auftreten oder in der warmen Jahreszeit dann, wenn sich durch spezielle Wettersituationen wie Sturm oder fehlender Sonneneinstrahlung im Gewässer keine vertikale Temperaturdifferenz zwischen der Oberfläche und der Tiefe ausbilden kann.

Die Kenntnis über den Einfluss des Wetters auf die vertikale Temperaturdifferenz in einem Gewässer ist daher sehr wichtig, um das Wirken einer Freistrahlanlage richtig beurteilen zu können. In der vorliegenden Arbeit soll allerdings nur sehr kurz auf diesen Zusammenhang eingegangen werden.

Erst eine Folgearbeit "Beitrag zur Bewertung der Freistrahlanlagen im Banter See Wilhelmshaven im Zusammenhang mit dem Wettergeschehen" beschäftigt sich damit näher /8/. In dieser Folgearbeit wird außerdem detailliert untersucht, ob die vertikale Temperaturdifferenz durch das Wettergeschehen von oben her (ausgehend von der Wasseroberfläche) oder eventuell durch die Freistrahlanlagen von unten her (ausgehend von der Tiefe des Gewässers) beeinflusst wird.

Strömungen unterliegen nicht nur an einer Wand, oder wie hier beim Freistrahlanlage an den Flanken des Strömungskegels, sondern auch im Inneren einer Reibung. Bei dieser inneren Reibung wird Strömungsenergie entwertet (dissipiert). Bei Stromröhren mit festen Wänden bewirkt diese Reibung bekanntlich einen Druckverlust und das Absinken des statischen Druckes ist die Folge. Bei einer freien Strömung dagegen wird die Reibung die lineare Strahlausbreitung begrenzen, so dass der Strahl nach Durchlaufen der Strömungstrecke zur Ruhe kommt. Im vorliegenden Teil 1 der Arbeit wird dieser Sachverhalt der inneren Reibung noch vernachlässigt.

3. Stand der theoretischen Grundlagen zur Freistrahlanlage

In /6/ wird für die Freistrahlanlage (Leitrohr) der Dynamikdruckterm der BERNOULLI-Gleichung (als Druckgleichung) /9/ benutzt, um den Zusammenhang zwischen aufgewendeter Antriebsleistung für den Propeller und der Austrittsgeschwindigkeit c_0 aus dem Leitrohr herzustellen.

Diese Austrittsgeschwindigkeit wird nun mit rein empirischen Ansätzen für die turbulente Strahlausbreitung von PERRY /10/ und von TRUCKENBRODT /11/ gekoppelt. Folgende Gleichungen werden angegeben:

$$c_{\max}(\mathbf{x}) = 6,57 \frac{d_0}{\mathbf{x}} c_0 \quad \text{oder:} \quad c_{\max}(\mathbf{x}) = 1,41 \cdot \text{Re}^{0,135} \frac{d_0}{\mathbf{x}} c_0 \quad (1)$$

Hierin bedeuten \mathbf{x} die Freistrahllänge und d_0 der Anfangsdurchmesser (auch Durchmesser des Leitrohres) bei $\mathbf{x} = 0$.

$c_{\max}(\mathbf{x})$ stellt die axiale Geschwindigkeit im mittleren Stromfaden als Funktion der Freistrahllänge \mathbf{x} dar, die im Vergleich zu parallelen Stromfäden ein Maximalwert einnimmt.

Die Gl(2) beschreibt den Volumenstrom $\dot{V}(\mathbf{x})$ im Freistrahls als Funktion der Freistrahllänge \mathbf{x} . \dot{V}_0 ist hierbei der Volumenstrom am Anfang bei $\mathbf{x} = 0$.

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 0,456 \frac{\mathbf{x}}{d_0} \dot{V}_0 \quad (2)$$

Aus dieser Gleichung wird deutlich, dass der Volumenstrom mit der Freistrahllänge \mathbf{x} prinzipiell linear zunimmt und mit \mathbf{x} über alle Maßen steigen kann, was nur bei Vernachlässigung der inneren Reibung (Energiedissipation) vorstellbar ist. Die Volumenstromzunahme lässt sich durch die reibungsbedingte Ansaugung von Umgebungswasser über die Freistrahlfanken in den Freistrahls begründen.

Die Gl(3) beschreibt bei der Länge \mathbf{x} für die axiale Komponente die radiale Geschwindigkeitsverteilung.

$$\mathbf{c}(\mathbf{r}) = \mathbf{c}_{\max}(\mathbf{x}) \cdot \exp\left(-\ln(2) \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}(\mathbf{x})}\right)^2\right) \quad (3)$$

Diese Gleichung der Geschwindigkeitsverteilung $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ als Funktion vom Radius \mathbf{r} liefert vom Typ her einen glockenförmigen Verlauf und auch bei sehr großen Radien tritt demnach in axialer Richtung noch eine nennenswerte Geschwindigkeit auf. Weiterhin wird eine Gleichung für den Flankenwinkel α des turbulenten Freistrahls angegeben:

$$\alpha = 2 \cdot \arctan(\text{Re}^{-0,135}) \quad (4)$$

Die REYNOLDS-Zahl /9/ wird hier auf den Anfangszustand des Freistrahls an der Stelle $\mathbf{x} = 0$ bezogen:

$$\text{Re} = \frac{\mathbf{c}_0 d_0 \rho_w}{\eta_w} \quad (5)$$

Experimentelle Untersuchungen im Labormaßstab zeigten, dass das Strömungsgebiet des Freistrahls zum Umgebungswasser scharf abgegrenzt ist, was durch Einfärben des Freistrahls mit Tinte sehr gut feststellbar ist /5; und Folgearbeiten, unveröffentlicht/. Die Strömung im Freistrahls ist dabei auf Grund seiner Turbulenz stark verwirbelt. Eine glockenförmige Geschwindigkeitsverteilung der axialen Komponente wird nicht als Widerspruch zum scharf abgegrenzten Strömungsgebiet des Freistrahls gesehen. Bei der Visualisierung des Freistrahls mit Tinte wird auch die radiale und nicht nur die axiale Geschwindigkeitskomponente angezeigt.

Weitere umfangreiche und mit den Gln(1) bis (5) vergleichbare Literaturmodelle für den turbulenten Freistrahls sind in /11/ zu finden, die erklärtermaßen nur dann gelten, wenn der Impulsstrom im Freistrahls konstant bleibt und isotherme Bedingungen im Gewässer vorliegen. Diese werden daher hier nicht aufgeführt.

Es kann festgestellt werden, dass die Gln(1) bis (5) dem Charakter nach mehr kinematischen Elementargleichungen der Translation für die Strömung im Freistrahл entsprechen als Auslegungsgleichungen für den Freistrahл selbst. Mit diesen Gleichungen kann nicht das reale Verhalten des Freistrahles in einem Gewässer abgebildet werden, so wie es mit der im Abschnitt 1. dargelegten Modellierungsbasis möglich wäre. Dadurch können physikalische Gegebenheiten im System wie z.B. der temperaturbedingte Auftrieb, der Neigungswinkel der Anlage oder die innere Reibung gar nicht sowie variable Betriebszuständen wie z.B. die Leistung der Anlage nur bedingt berücksichtigen werden.

In einer Beispielrechnung erhält MICHELE (2006 unveröffentlicht) folgende Ergebnisse:

Anfangswerte: · Strömungsgeschwindigkeit, $[c_0] = \text{m/s}$ · Strahldurchmesser, $[d_0] = \text{m}$ · Volumenstrom, $[\dot{V}_0] = \text{m}^3/\text{s}$	1 1 0,785
Annahmen: · kinematische Viskosität, $[\nu_w] = \text{m}^2/\text{s}$ · REYNOLDS-Zahl, $[\text{Re}] = -$ · Strömungslänge, $[\mathbf{x}] = \text{m}$	10^{-6} 10^6 20; 30
Ergebnisse: · Flankenwinkel, $[\alpha] = ^\circ$ · maximale Geschwindigkeit mittlerer Stromfaden: .. nach 20 m, $[c_{\text{max}(20)}] = \text{m/s}$.. nach 30 m, $[c_{\text{max}(30)}] = \text{m/s}$ · Strahldurchmesser nach 30 m, $[d_{30}] = \text{m}$ · Volumenstrom nach 30 m, $[\dot{V}_{30}] = \text{m}^3/\text{s}$	17,6 0,455 0,303 14 10,74

Tabelle 1: Beispielrechnung mit den Gln(1) bis (5) zum Freistrahл von MICHELE, (2006 unveröffentlicht)

Diese Ergebnisse der linearen Strahlausbreitung in Tabelle 1 spiegeln nicht die wirklichen Vorgänge im Freistrahл wider. Allein schon aus den Freistrahlabbildungen der Laboruntersuchungen in /5/ wurden wesentlich kleinere Winkel α als $17,6^\circ$ für die Freistrahлflanken erhalten, so dass auch die anderen berechneten Werte für den Strahldurchmesser und den Volumenstrom ebenfalls zu groß ausgefallen sein dürften.

4. Allgemeine Grundlagen

Im vorliegenden Abschnitt sollen die Erhaltungssätze insoweit erklärt werden, wie diese für die Modellierung wichtig sind. Anschließend werden noch theoretische und empirische Grundlagen zusammengestellt.

- Stoff-/Massenerhaltungssatz:

In Strömungssystemen tritt meist kein stofflicher Umsatz auf, so dass sich der Massenerhaltungssatz auf die Kontinuitätsgleichung Gl(6) reduziert /9/.

$$\dot{m} = \rho_w \mathbf{A} \mathbf{c} = \text{konst} \quad (6)$$

- Energieerhaltungssatz:

Neben der Strömungsenergie kann noch die thermische Energie auftreten.

Bekanntlich ist der Energieerhaltungssatz eine Skalargleichung, bei der die Bewegungsrichtungen des Fluids keine Rolle spielen. Bei Strömungssystemen mit festen Grenzen (Wänden) liefert der Energieerhaltungssatz für die spezifische Strömungsenergie (BERNOULLI-Gleichung /9/) mit dem kinetischen Energieterm selbstverständlich auch Lösungen für die Geschwindigkeit des Fluids. Diese Geschwindigkeit ist vektoriell nicht gerichtet und sie entspricht daher einer skalaren Lineargeschwindigkeit.

Sinngemäß gilt das auch für einen Freistrah. Allerdings ist bei einem Freistrah mit Auftrieb eine Bahnkurve wahrscheinlich, die aus diesem Grunde nicht nur über den Energieerhaltungssatz berechnet werden kann. Deshalb und wegen der Vernachlässigung der inneren Reibung (Energiedissipation) wird in dieser Arbeit für die Modellierung der Freistrahlausbreitung in einem Gewässer auf die Einbeziehung des Energieerhaltungssatzes für die Strömungsenergie verzichtet.

Wie schon erwähnt, nimmt in einem Gewässer im Allgemeinen die Temperatur vertikal von der Wasseroberfläche bis zum Grund hin ab.

Da der Freistrah vom Oberflächenwasser höherer Temperatur gespeist wird, mischt sich in seinem Bewegungsverlauf ständig Umgebungswasser tieferer Temperatur hinzu und es stellt sich nach der Vermischung eine mittlere Temperatur ein.

Beim Mischen von zwei Massen Wasser **a** und **b** mit jeweils unterschiedlichen Temperaturen T_a und T_b ist der Energieerhaltungssatz für die thermische Energie anzuwenden und es ergibt sich aus folgender Bilanz der inneren Energien Gl(7) die mittlere Temperatur \bar{T} der Mischung. Dabei wird die spezifische Wärmekapazität als nicht temperaturabhängig angesehen.

$$m_a \Delta u_a + m_b \Delta u_b = 0$$

$$m_a c_v (T_a - \bar{T}) + m_b c_v (\bar{T} - T_b) = 0$$

$$\bar{T} = \frac{m_a T_a + m_b T_b}{m_{\text{ges}}} \quad (7)$$

Für die mittlere Temperatur ist es unerheblich, ob in Gl(7) Massen oder Massenströme verwendet werden.

- Impulsstromerhaltungssatz:

Der Impulsstromerhaltungssatz für ein allgemeines Strömungsgebiet **1** → **2**, der in der Strömungstechnik auch als Impulsstrombilanz bezeichnet wird, lautet /9/:

$$\vec{I}_2 - \vec{I}_1 = \Sigma \vec{F} \quad (8)$$

Hierin bedeuten \vec{I}_1 und \vec{I}_2 die Ein- und Austrittsimpulsströme sowie $\Sigma \vec{F}$ die Summe aller von außen auf das Bilanzgebiet einwirkenden Kräfte.

Dieser Erhaltungssatz hat für die vorliegende Arbeit die größte Bedeutung, da er als Vektorgleichung die jeweiligen Wirkungsrichtungen von den Impulsströmen und von den Kräften direkt berücksichtigt.

Für Strömungssysteme in festen Grenzen wird $\Sigma \vec{F}$ im Wesentlichen aus Überdruck- und aus Wandkräften gebildet. Für freie Strömungen, wie im Fall des Freistrahls, ist dieser Term neu zu formulieren, was im Abschnitt 6. vorgenommen wird.

- NEWTON'sches Reibungsgesetz:

Durch die Reibung an den Flanken des Freistrahls wird Umgebungswasser in den Freistrahlingesaugt, was mit dem NEWTON'schen Fluidreibungsgesetzes Gl(9) beschrieben werden kann /9/.

$$\mathbf{F}_R = \tau \mathbf{A} = \eta_w \mathbf{A} \frac{\Delta \mathbf{c}}{\Delta \mathbf{y}} \quad (9)$$

Die in Gl(9) enthaltene dynamische Viskosität η_w gilt für eine laminare Strömung und stellt ein Stoffwert des Wassers unter dieser Bedingung dar (NEWTON'sches Fluid). Bekanntlich ist in der allgemeinen Impulsstromtransportbilanz die dynamische Viskosität η die Intensitätsgröße des Konduktionsterms für ein Fluid /13/. Weiterhin ist bekannt, dass im Fall von turbulenten Strömungen, d.h. wenn die Konduktion durch die turbulente Konvektion überlagert wird, solche Intensitätsgrößen mit Termen erweitert werden können /12/.

Diese turbulente dynamischen Viskosität kann durchaus mehrere Größenordnungen höher liegen als η_w in Gl(9). Die dynamische Viskosität des Wassers im Freistrahling ist daher nicht nur ein schlichter Stoffwert des Wassers, sondern eine auf die jeweiligen Strömungsbedingungen im Freistrahling zu bestimmende kinetische Intensitätsgröße. Solche kinetischen Größen, die aus konduktiven und konvektiven Anteilen zusammengesetzt sind, lassen sich nur aus entsprechenden experimentellen Versuchen bestimmen, wobei die Bedingungen des Experimentes denen des praktischen Anwendungsfalles entsprechen müssen.

- Temperaturfunktion:

Von der Fa. MarChemConsult, Varel, wurden in den letzten Jahren sehr umfangreiche Beprobungsprogramme zur Wasserqualität des Banter Sees Wilhelmshaven durchgeführt sowie Wetteraufzeichnungen vorgenommen.

LIEBEZEIT fasste die Ergebnisse in jährlichen Berichten mit dem Titel "Ökologische Begleituntersuchungen zum Einsatz eines Freistahlverfahrens im Banter See" für die Jahre 2008 bis 2011" zusammen /14/. Die detaillierte Auswertung dieser Ergebnisse im Hinblick auf die Wirkungen der Freistrahlanlage zur "Bekämpfung der Blaualgenproblematik im Banter See" /4/ steht vom Projektteam /3/ noch aus.

Ein eigener Beitrag zur Bewertung der Freistrahlanlagen im Zusammenhang mit dem Wettergeschehen ist, wie schon erwähnt, einer weiteren Arbeit vorbehalten /8/.

Für die vorliegende Arbeit soll aus dem Bericht 2011 nur die grafische Darstellung Abb 29 der Temperaturdifferenz von der Oberfläche bis zu einer Tiefe von **-9 m** (vertikale Temperaturdifferenz), Station A im zeitlichen Verlauf ab dem Jahr 2006 verwendet werden (Bild 3).

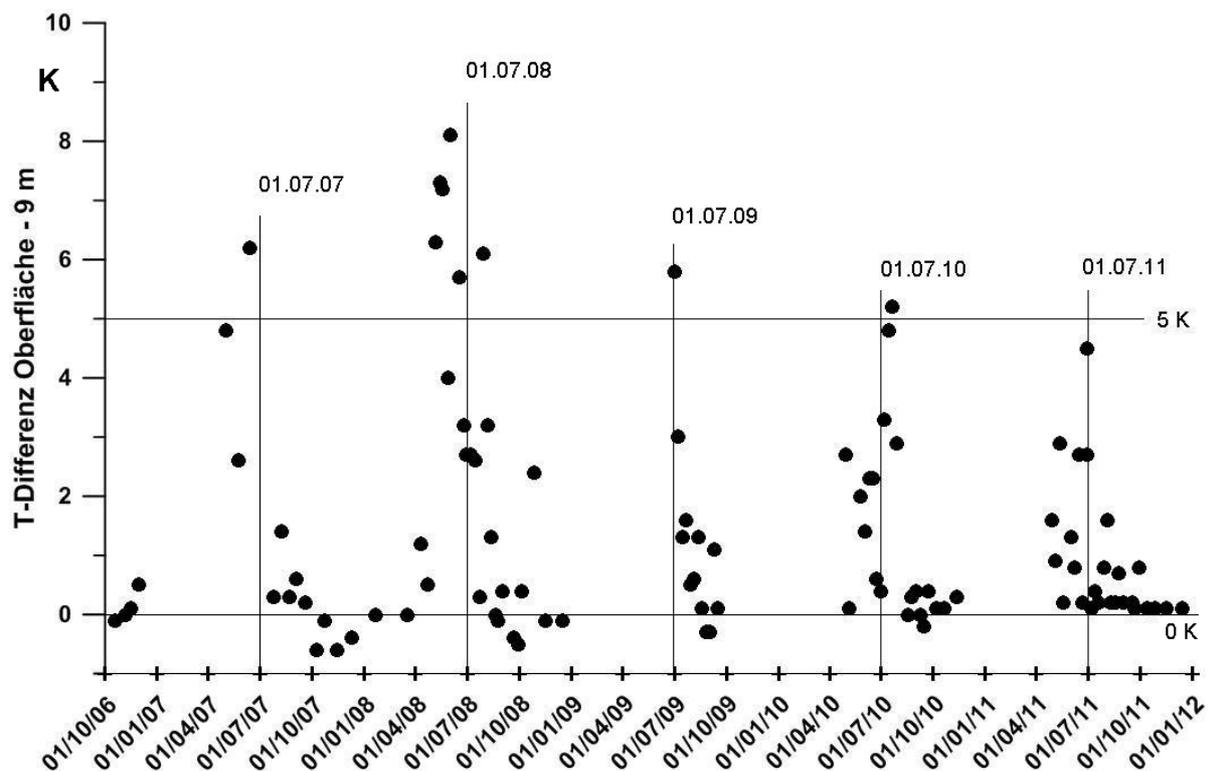


Bild 3 Wassertemperaturdifferenz zwischen der Oberfläche bis zu einer Tiefe von **-9 m** (vertikale Temperaturdifferenz), Banter See Wilhelmshaven, Station A der Jahre 2006 bis 1011 /14/

Im Bild 3 ist zu sehen, dass in jedem Jahr in den Sommermonaten Juni/Juli diese vertikale Temperaturdifferenz im Bereich von **5 bis 8 K** lag, sich aber auch Zeiten ohne nennenswerte vertikale Temperaturdifferenz unmittelbar anschlossen.

Wenn die Temperaturdifferenz **0 K** vorliegt, dann sind die Bedingungen im Gewässer von der Wasseroberfläche bis zu einer Tiefe **-9 m** isotherm, d.h. bezüglich der Temperatur gradientenfrei und es kann vom Durchmischungszustand "ideale Durchmischung" ausgegangen werden. Ansonsten existieren mehr oder weniger große vertikale Temperaturgradienten.

Aus diesen sehr starken und abrupten Schwankungen der vertikalen Temperaturdifferenz innerhalb von wenigen Tage kann geschlossen werden, dass das Wettergeschehen den maßgeblichen Einfluss auf diese vertikale Temperaturdifferenz haben muss und nicht die Freistrahlanlagen selbst. Wegen ihrer geringen Leistungen sind sie dazu gar nicht in der Lage, was bereits im Abschnitt 2. festgestellt wurde und was noch in der erwähnten weiteren Arbeit /8/ näher zu untersuchen ist. Weiterhin ist offensichtlich, dass das zeitliche Verhalten dieser vertikalen Temperaturdifferenz im Bild 3 in allen Jahren ab 2007 ähnlich ist. Dass die Freistrahlanlagen aber erst ab dem Jahr 2008, bzw. erst ab 2009 in Betrieb gegangen sind, spricht ebenfalls für das Wettergeschehen als Haupteinflussgröße auf diese vertikale Temperaturdifferenz.

In diese Arbeit wird zur Vereinfachung angenommen, dass während der Haupteinsatzzeit der Freistrahlanlage im Sommerhalbjahr die Temperatur im Gewässer an der Oberfläche im Mittel von **20 °C** bis zu einer Tiefe von **-10 m** auf **15 °C** linear absinkt. Folgende lineare Funktion wurde zu Grunde gelegt:

$$T(y) = T_0 + \Delta y \cdot \tan \varepsilon \quad (10)$$

Hierin bedeutet Δy die Änderung der Tiefenlage von der Wasseroberfläche als Negativwert und ε der Steigungswinkel dieser Temperaturgleichung. Für die angenommenen Werte ergibt sich:

$$\tan \varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta T} = 0,5$$

$$\varepsilon = \arctan(0,5) = 26,46^\circ$$

- Dichtefunktion:

Die Dichte des Wassers ist eine temperaturabhängige Funktion und kann näherungsweise nach einer quadratischen Temperaturfunktion berechnet werden /15/:

$$\rho_w(T) = 999,972 - 0,007 (T - 4)^2 \quad (11)$$

Hierin bedeutet **T** die Wassertemperatur in °C. Danach ergeben sich für die gewählten Temperaturen folgende Dichten:

$$T = 20 \text{ °C: } 998,18 \text{ kg/m}^3$$

$$T = 15 \text{ °C: } 999,12 \text{ kg/m}^3$$

- Funktion der dynamischen Viskosität des Wassers:

Für einen Druck von **1 bar** lautet die Temperaturfunktion der dynamischen Viskosität von Wasser /9/:

$$\eta_w = \frac{1,795 \cdot 10^{-3} \cdot K_1}{1 + 0,036 T + 0,000185 T^2} \quad (12)$$

Auch in Gl(12) bedeutet **T** die Temperatur in °C. Die Konstante **K₁** ist eine strömungskinetische Größe zur Berücksichtigung der erwähnten turbulenten Konvektionsanteilen. Diese Konstante kann im Bereich bis **10⁴** liegen.

- Kinematik:

-- Geschwindigkeit/Weg-Zeit-Gesetz (Translation):

Für die Beschleunigung eines Massenpunktes gilt:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 \pm \mathbf{a} t \quad (13)$$

$$c = \sqrt{c_0^2 \pm 2 a \ell}$$

In den Gl(13) bedeuten **a** je nach dem Vorzeichen die gleichmäßige Beschleunigung/Verzögerung, **t** und **ℓ** die Zeit und der zurückgelegte Weg, sowie **c₀** die Anfangsgeschwindigkeit.

-- Bahnkurve eines Massenpunktes beim schrägen Wurf (nach oben):

Der schräge Wurf stellt eine Überlagerung von zwei Bewegungen in verschiedenen Richtungen dar. Die gleichförmige Geschwindigkeit gilt in der **x**- und in der **y**-Richtung, während die gleichmäßig beschleunigte Bewegung nur in der **y**-Richtung auftritt. Dadurch wird für den bewegten Massenpunkt eine Bahnkurve erhalten.

Für die Bewegungen des Freistrahles unter nichtisothermen Bedingungen und des Massenpunktes beim schrägen Wurf mit ihren jeweiligen Bahnkurven existiert zueinander eine Analogie. Daher werden hier zur Veranschaulichung die Gleichungen des schrägen Wurfs aufgezeigt, die bei der Modellentwicklung im Abschnitt 6. eine wichtige Rolle spielen werden /16/. Sie lauten für den reibungsfreien Vorgang in vektorieller Darstellung in der **x-y**-Ebene:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} c_{0,x} t \\ c_{0,y} t - \frac{g t^2}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_{0,x} \\ c_{0,y} - g t \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (14)$$

In der Gl(14) bedeutet \vec{r} den Ortsvektor (Bahnpunkt **x**, **y**) und \vec{g} die Erdbeschleunigung.

5. Zielstellung

In dieser Arbeit soll die Theorie der Freistrahlausbreitung weiterentwickelt werden, um realistischere Bewegungsabläufe für den Freistrah in einem Gewässer zu erhalten, als sie durch die Anwendung von bisherigen Literaturmodelle möglich sind. Die Wirkung des Freistrahles hinsichtlich der Weite und der Tiefe im Gewässer in Abhängigkeit von verschiedenen Einflussgrößen, d.h. die Bahnkurve voraus zu berechnen, ist das erklärte Ziel.

Bei der Modellierung ist die Reibung an den Flanken des Freistrahles mit einzubeziehen, weil diese für die Ansaugung von Umgebungswasser in den Freistrah verantwortlich ist. Die Energiedissipation wird vernachlässigt.

Einflussgrößen für die Modellrechnungen sollen die vertikale Temperaturdifferenz im Gewässer, der Neigungswinkel des Leitrohres, die strömungskinetische Konstante der dynamischen Viskosität für turbulente Strömungen bei der Wasseransaugung in den Freistrah mittels Reibung und die Leistung der Anlage sein .

Die gewählten Berechnungsdaten sollen sich auf die Freistrahlanlagen des Banter Sees, Wilhelmshaven beziehen.

6. Weiterentwicklung des mathematisch-physikalischen Modells

Wie schon im Abschnitt 4. festgestellt wurde, kommt dem Impulsstromerhaltungssatz Gl(8) eine zentrale Bedeutung zu, da dieser als Vektorgleichung die Richtung der darin erhaltenen Impulsströme und der wirkenden Kräfte beschreibt. Außerdem lässt er ein einheitliches Vorgehen für die Bilanzierung sowohl der Freistrahlanlage als auch des Freistrahles selbst zu, wie im Folgenden gezeigt wird.

Wie schon erwähnt, besteht die Freistrahlanlage aus einem zylindrischen Leitrohr und einem Propeller. Entsprechend Bild 3 breitet sich der Freistrah für isotherme Gewässerbedingungen als freie Strömung linear und kegelförmig aus.

Bei der Herleitung der Modellgleichungen wird sich zeigen, dass eine geschlossene analytische Lösung nicht möglich ist. Eine numerische Lösung soll wegen der Komplexität der Problematik nicht angestrebt werden und deshalb wird ein abschnittsweises Approximationsverfahren unter Einbeziehung von grafischen Lösungen für jeden Abschnitt mit der Software MathCad prime 1.0 angewendet.

Für diese Approximation wird das gesamte Strömungsgebiet des Freistrahles in einzelne Bilanzgebiete (Segmente) unterteilt, die geometrisch jeweils als Zylinder, bzw. als Kegelstumpf aufgefasst werden (siehe Bild 4).

Das Wasser des Gewässers wird als ruhend angenommen.

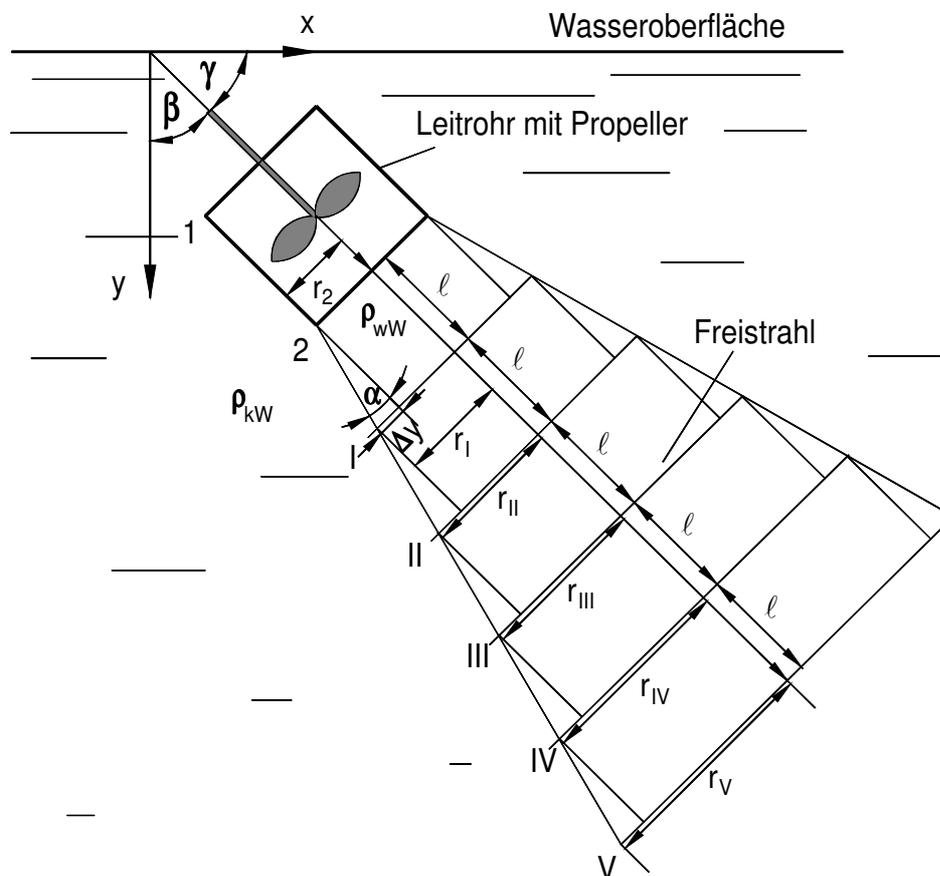


Bild 4 Segmentierung des Freistrahls für die Modellbildung in die einzelnen Bilanzgebiete I, II, III, ...; lineare Strahlausbreitung, isotherm

Daher ergeben sich für jedes Bilanzgebiet integrale Bilanzen, die dann relativ einfach gelöst werden können. Bei dieser abschnittswisen Berechnung bilden die Bedingungen am Austritt des vorhergehenden Bilanzgebietes stets die Bedingungen am Eintritt des folgenden Bilanzgebietes. Jedes einzelne Bilanzgebiet steht für die Modellannahme, dass sich der zylindrische Teil aus der Kolbenströmung des vorhergehenden Bilanzgebietes ergibt. An der Zylindermantelfläche wird durch Reibung Umgebungswasser in den Freistrahls eingesaugt und die sich bildenden Flanken des Kegelstumpfes werden durch dieses angesaugte Umgebungswasser repräsentiert. Um die Bahnkurve des Freistrahls berechnen zu können, wird unter Ausnutzung der Analogie zur Bahnkurve des schrägen Wurfs die Gl(14) weiterentwickelt.

Bilanzgebiet 2, (Leitrohr der Freistrahlanlage):

Das Bilanzgebiet 2, d.h. die eigentliche Freistrahlanlage, besteht aus dem zylindrischen Leitrohr mit Propeller und es erstreckt sich von 1 nach 2 (siehe Bild 4). Die Impulsstrombilanz ergibt sich unmittelbar aus der Gl(8) mit Einführung der Schubkraft \vec{F}_{12} , die durch den Propeller aufgebracht wird.

$$\begin{aligned} \vec{l}_2 - \vec{l}_1 &= \vec{F}_{12} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (15)$$

Der Eintrittsimpulsstrom \vec{l}_1 ist zu vernachlässigen, weil die Annahme zugrunde liegt, dass das Wasser aus der Ruhelage beschleunigt wird.

Bei der Bilanzierung werden die Stoffwerte einfachheitshalber auf den Eintritt, also auf den Punkt **1** bezogen. Es gilt in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung Gl(6):

$$\begin{aligned} \vec{l}_2 &= \dot{m}_2 \vec{c}_2 = \rho_{\text{ww},1} \pi r_2^2 \vec{c}_2^2 \\ P_{12} &= \vec{F}_{12} \vec{c}_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Die Dichte des Freistrahlwassers $\rho_{\text{ww},1}$ (warmes Wasser) folgt aus der Annahme, dass es vom Oberflächenwasser höherer Temperatur gespeist wird, und dass dessen Temperatur sich bis zur Stelle **1** nicht verändert hat.

Die Leistung P_{12} (Momentanleistung) in Gl(16) ist das Skalarprodukt zweier Vektoren. Als Lösung wird für die Geschwindigkeit an der Stelle **2** erhalten:

$$\vec{c}_2 = \sqrt[3]{\frac{P_{12}}{\rho_{\text{ww},1} \pi r_2^2}} \quad (17)$$

Entsprechend der Vektorenzerlegung in die **x**-Richtung (waagrecht) und in die **y**-Richtung (senkrecht) ergeben sich für diese Komponenten der Geschwindigkeit bezüglich des Neigungswinkels des Leitrohres zur Senkrechten β_2 die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \underline{\mathbf{x}} \text{ - Richtung} & \underline{\mathbf{y}} \text{ - Richtung} \\ \vec{c}_{2,x} = \vec{c}_2 \sin \beta_2 & \vec{c}_{2,y} = \vec{c}_2 \cos \beta_2 \end{array} \quad (18)$$

Die Bahnkurve der Wasserbewegung in der Freistrahlanlage und in dem folgenden Freistrahlel beginnt am Eintrittspunkt **1** des Leitrohres, der mit den Längen in **x**- und in **y**-Richtung mit $l_{1,x} = 0 \text{ m}$ sowie gemäß der Geometrie der Freistrahlanlagen BANT 1 mit $l_{1,y} = -1,4 \text{ m}$ (Minus: nach unten) festgelegt wurde.

Die Länge des Leitrohres beträgt $l_R = 1,5 \text{ m}$, so dass sich für den Austritt **2** je nach dem Neigungswinkel β_2 folgender Bahnpunkt ergibt:

$$l_{2,x} = l_R \sin \beta_2 \quad l_{2,y} = -l_R \cos \beta_2 + l_{1,y} \quad (19)$$

Bilanzgebiet I:

Das Strömungsgebiet des Freistrahls ist in die Bilanzgebiete **I, II, III, ...** zerlegt worden (Bild 4). Die folgenden Ausführungen beziehen sich zwar auf das Bilanzgebiet **I**, aber zur Verallgemeinerung werden die einzelnen Aussagen auch für die nachfolgenden Bilanzgebiete getroffen.

Dieses Bilanzgebiet **I** ist das erste Bilanzgebiet des Freistrahls und es umfasst nach dem Leitrohr das freie Strömungsgebiet von **2** nach **I**. Nach der Modellvorstellung soll an der Zylindermantelfläche durch die Reibung eine Wasseransaugung auftreten.

Dieses angesaugte Wasser wird durch die Flanken des Kegelstumpfes repräsentiert. Die Mantelfläche des Zylinders $A_{M,I}$ und die Volumina V_I des Zylinders und des Kegelstumpfes **I** ergeben sich nach den folgenden Gln(20):

$$\begin{array}{ll}
 \text{Zylinder} & \text{Kegelstumpf} \\
 A_{M,I} = 2 \pi r_2 \ell & \\
 V_I = \pi r_2^2 \ell & V_I = \frac{\ell \pi}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)
 \end{array} \tag{20}$$

Hierin bedeutet ℓ die Länge (Höhe) des Zylinders, bzw. des Kegelstumpfes für das Bilanzgebiet **I**.

Der Flankenwinkel des Kegelstumpfes wird mit α bezeichnet (siehe Bild 4). Der Radius r_1 für den Austritt der Strömung aus dem Bilanzgebiet **I** der Länge ℓ ergibt sich mit diesem Flankenwinkel nach folgender Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha &= \frac{r_1 - r_2}{\ell} \\
 r_1 &= \ell \tan \alpha + r_2
 \end{aligned} \tag{21}$$

Der Impulsstromerhaltungssatz entsprechend der Gl(8) soll nun für das Bilanzgebiet **I** formuliert werden.

Nach SIEGLOCH /17/ können in dieser Impulsstrombilanz Gl(8) im $\Sigma \vec{F}$ -Term weitere Kräfte wie die Reibungskraft \vec{F}_r an der Strömungsbegrenzung (Mantelfläche des Zylinders), sowie die Schwer- und die Auftriebskraft \vec{F}_G und \vec{F}_A enthalten sein.

Die dafür erforderlichen Stoffwerte werden dabei ebenfalls stets auf den Eintrittszustand des Bilanzgebietes, also für das Bilanzgebiet **I** auf die Stelle **2** bezogen. Durch die vorgesehene Abschnittweiseberechnung des Freistrahls ist für die einzelnen Bilanzgebiete eine tatsächliche abweichende Geometrie vom Zylinder/Kegelstumpf um so bedeutungsloser, je kürzer die Bilanzgebiete gewählt werden. Im vorliegenden Fall wird eine einheitliche Länge der Bilanzgebiet von $\ell = 1 \text{ m}$ vorgesehen.

Für die weitere Herleitung des mathematisch-physikalischen Modells werden folgende Voraussetzungen und Vereinfachungen getroffen, bzw. zusammengefasst, die für das erste und alle weiteren Bilanzgebiete des Freistrahls sinngemäß gelten:

- Für das radiale Strömungsprofil wird ein Zylinder angenommen, welcher mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchströmt wird (Kolbenströmung).

- Das Flankenvolumen des Kegelstumpfes, also die Differenz des Kegelstumpf- zum Zylindervolumen bildet sich durch die reibungsbedingte Ansaugung von Umgebungswasser in den Freistrah. Als Fläche \mathbf{A} im Reibungsgesetz Gl(9) gilt die Mantelfläche des Zylinders $\mathbf{A}_{M,I}$ Gl(20).
- An der Austrittsstelle (Seite des großen Radius am Kegelstumpf) tritt eine vollkommene Quervermischung des Wassers aus dem Zylinder und des Wassers aus den Flanken des Kegelstumpfes auf, so dass sich auf den gesamten Querschnitt bezogen eine einheitliche Geschwindigkeit \vec{c}_1 einstellt.
- Das Umgebungswasser des Freistrahls wird als ruhend angesehen.
- Die unterschiedlichen Geschwindigkeiten am Ein- und am Austritt weist die Strömung im Bilanzgebiet als gleichmäßig beschleunigte/verzögerte Bewegung aus.
- Wegen unterschiedlicher Temperaturen des Freistrah- und des Umgebungswassers ergeben sich dichtebedingt unterschiedliche Schwer- und Auftriebskräfte.
- Da in jedem einzelnen Bilanzgebiet unterschiedliche Beschleunigungen/ Verzögerungen auftreten können, gilt die gesamte Strömung des Freistrahls entlang der Bahnkurve als eine ungleichmäßig beschleunigte/verzögerte Bewegung.
- Die Stoffwerte beziehen sich stets auf den Eintrittszustand des jeweiligen Bilanzgebietes, der identisch ist mit dem Austrittszustand des vorhergehenden Bilanzgebietes.
Die Dichte des Freistrahwassers wird mit ρ_{ww} (warmes Wasser) und die Dichte des Umgebungswassers mit ρ_{kw} (kaltes Wasser) bezeichnet.
- Die Energiedissipation wird vernachlässigt.

Die Impulsstrombilanz nach Gl(8) für das Bilanzgebiet I und dann sinngemäß auch für alle folgenden Bilanzgebiete lautet:

$$\vec{I}_1 - \vec{I}_2 = -\vec{F}_{\tau,I} + \vec{F}_{G,I} - \vec{F}_{A,I} \quad (22)$$

Nach dem zweiten NEWTON'schen Gesetz bewirken Kräfte am bewegten Massenpunkt je nach dem Vorzeichen Beschleunigungen oder Verzögerungen. Daraus ergibt sich für die Gl(22), dass die Reibungskraft $\vec{F}_{\tau,I}$ den nach unten gerichteten Impulsstrom verzögert, die Schwerkraft $\vec{F}_{G,I}$ diesen beschleunigt und die Auftriebskraft $\vec{F}_{A,I}$ diesen ebenfalls verzögert. Für das Bilanzgebiet I gilt:

$$\begin{aligned} \text{Impulsstrom Eintritt, 2:} & \quad \vec{I}_2 = \dot{m}_2 \vec{c}_2 = \rho_{ww,2} \dot{V}_2 \vec{c}_2 \\ \text{Impulsstrom Austritt, I:} & \quad \vec{I}_1 = \dot{m}_1 \vec{c}_1 = \rho_{ww,2} \dot{V}_1 \vec{c}_1 \\ \text{Reibungskraft, Mantel:} & \quad \vec{F}_{\tau,I} = \mathbf{A}_{M,I} \vec{\tau}_1 \\ \text{Schwerkraft (senkrecht):} & \quad \vec{F}_{G,I} = \rho_{ww,2} \mathbf{V}_1 \vec{g} \\ \text{Auftriebskraft (senkrecht):} & \quad \vec{F}_{A,I} = \rho_{kw,2} \mathbf{V}_1 \vec{g} \end{aligned} \quad (23)$$

Die Schwerkraft für den Freistrah in Gl(23) wird durch das Wasser höherer Temperatur mit der kleineren Dichte ρ_{ww} (warmes Wasser) und die Auftriebskraft durch das Umgebungswasser tieferer Temperatur mit der höheren Dichte ρ_{kw} (kaltes Wasser) definiert. Beide Kräfte haben stets eine senkrechte Wirkungsrichtung und sie stellen sich auf Grund dieser Dichten als resultierende Kraft mit der Wirkungsrichtung nach oben ein. Dieser Fall wird im Folgenden stets als Auftrieb bezeichnet.

Die resultierende Kraft mit der Wirkungsrichtung nach unten, also der Abtrieb ergibt sich dann, wenn das Freistrahwasser eine tiefere Temperatur und damit eine höhere Dichte als das Umgebungswasser aufweist. Wie in späteren Modellrechnungen gezeigt wird, tritt dieser Fall bei einem zweiten Bahnkurvenumkehrpunkt auf.

Im Fall isothermer Gewässerbedingungen tritt kein Auftrieb/Abtrieb auf und in Gl(22) fallen die beiden Terme der Schwer- und der Auftriebskraft weg.

Bei der Bilanzierung werden, wie schon mehrfach erwähnt, die Stoffwerte auf den Eintritt, also auf den Punkt **2** bezogen.

Die Schubspannung τ_1 in der Reibungskraft $\vec{F}_{\tau,1}$ Gl(23), die an der Mantelfläche des zylindrischen Bilanzgebietes **I** wirkt, ergibt sich für das Wasser aus der dynamischen Viskosität $\eta_{kw,2}$ des turbulent eingesaugten Wasserstromes (kinetische Größe!) bei tieferer Temperatur des Umgebungswassers, multipliziert mit dem Geschwindigkeitsgradienten quer zur Strömungsrichtung, siehe Gl(9):

$$\tau_1 = \eta_{kw,2} \left(\frac{\Delta \mathbf{c}}{\Delta \mathbf{y}} \right)_1 \quad (24)$$

Für die Kegelstumpfflanken als gewähltes geometrisches Modell der einzelnen Bilanzgebiete, wird davon ausgegangen, dass diese Flanken mit dem Steigungswinkel α aus dem durch die Reibung angesaugten Umgebungswasser gebildet werden (siehe Bild 4). Die Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta \mathbf{c}$ quer zur Strömungsrichtung folgt aus dem arithmetischen Mittelwert im Bilanzgebiet **I** $(\bar{\mathbf{c}}_2 + \bar{\mathbf{c}}_1)/2$ bezogen auf den Ruhezustand $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$ an der Kegelstumpfmantelfläche, so dass gilt:

$$\Delta \mathbf{c} = \frac{\bar{\mathbf{c}}_2 + \bar{\mathbf{c}}_1}{2} \quad (25)$$

Die Flankenhöhenzunahme im Bilanzgebiet $\Delta \mathbf{y}_1$ ergibt sich ebenfalls über einen arithmetischen Mittelwert $(r_2 + r_1)/2$ bezogen auf den Zylinderradius r_2 :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{y}_1 &= \bar{r}_1 - r_2 = \frac{r_2 + r_1}{2} - r_2 \\ \Delta \mathbf{y}_1 &= \frac{r_1 - r_2}{2} \end{aligned} \quad (26)$$

In Gl(23) werden die Kräfte mit den Gln(24) bis (26) in Verbindung mit der Gl(9) sowie die Massenströme mit der Kontinuitätsgleichung Gl(6) erweitert:

$$\begin{aligned}
\text{Impulsstrom, Eintritt 2:} \quad \vec{I}_2 &= \rho_{ww,2} \pi r_2^2 \vec{c}_2^2 \\
\text{Impulsstrom, Austritt I:} \quad \vec{I}_1 &= \rho_{ww,2} \pi r_1^2 \vec{c}_1^2 \\
\text{Reibungskraft, Mantel:} \quad \vec{F}_{\tau,l} &= 2 \pi r_2 \ell \frac{\vec{c}_2 + \vec{c}_1}{r_1 - r_2} \cdot \eta_{kw,2} \quad (27) \\
\text{Schwerkraft (senkrecht):} \quad \vec{F}_{G,l} &= \rho_{ww,2} \pi r_2^2 \ell \vec{g} \\
\text{Auftriebskraft (senkrecht):} \quad \vec{F}_{A,l} &= \rho_{kw,2} \pi r_2^2 \ell \vec{g}
\end{aligned}$$

Aus der Gl(22) folgt mit den Gln(27):

$$\begin{aligned}
\rho_{ww,2} \pi r_1^2 \vec{c}_1^2 - \rho_{ww,2} \pi r_2^2 \vec{c}_2^2 &= -2 \pi r_2 \ell \frac{\vec{c}_2 + \vec{c}_1}{r_1 - r_2} \cdot \eta_{kw,2} \\
&+ \left(\rho_{ww,2} - \rho_{kw,2} \right) \pi r_2^2 \ell \vec{g} \cos \beta_1 \quad (28)
\end{aligned}$$

Der Winkel β_1 der Strömungsrichtung des Freistrahls im Bilanzgebiet I muss in der Gl(28) deshalb eingeführt werden, weil der Auftrieb/Abtrieb stets senkrecht und nicht in Strömungsrichtung wirkt und sich der Winkel vom vorhergehenden Bilanzelement 2 β_2 verändert haben kann.

Bei isothermen Gewässerbedingungen fällt in Gl(28) der zweite Term auf der rechten Seite weg, weil die Dichten sich aufheben.

Die Gl(28) ist eine quadratische Gleichung, die in die Normalform gebracht wird. Die Normalform lautet:

$$\begin{aligned}
\vec{c}_1^2 + \frac{2 r_2 \ell}{(r_1 - r_2) r_1^2} \cdot \frac{\eta_{kw,2}}{\rho_{ww,2}} \vec{c}_1 + \frac{2 r_2 \ell}{(r_1 - r_2) r_1^2} \cdot \frac{\eta_{kw,2}}{\rho_{ww,2}} \vec{c}_2 \\
- \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \right)^2 \vec{c}_2^2 - \left(1 - \frac{\rho_{kw,2}}{\rho_{ww,2}} \right) \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \right)^2 \ell \vec{g} \cos \beta_1 = 0 \quad (29)
\end{aligned}$$

Prinzipiell kann die analytische Lösung über die Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhalten werden:

$$\bar{c}_{1,1,2} = -\frac{\mathbf{p}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\right)^2 - \mathbf{q}} \quad (30)$$

mit:

$$\mathbf{p} = \frac{2 r_2 \ell}{(r_1 - r_2) r_1^2} \cdot \frac{\eta_{kW,2}}{\rho_{wW,2}}$$

$$\mathbf{q} = \frac{2 r_2 \ell}{(r_1 - r_2) r_1^2} \cdot \frac{\eta_{kW,2}}{\rho_{wW,2}} \bar{c}_2 - \left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right)^2 \bar{c}_2^2 - \left(1 - \frac{\rho_{kW,2}}{\rho_{wW,2}}\right) \left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right)^2 \ell \bar{\mathbf{g}} \cos \beta$$

Als Lösungen von Gl(30) werden erhalten:

$$\begin{array}{ll} \bar{c}_{1,1} & \text{wahre Lösung} \\ \bar{c}_{1,2} & \text{physikalisch sinnlose Lösung} \end{array}$$

Die Lösung von Gl(30) beschreibt die Lineargeschwindigkeit $\bar{\mathbf{c}}_1$ der Strömung am Austritt des Bilanzgebietes **I** als vektorielle Größe. Nach dem physikalischen Verständnis der Impulsstrombilanz Gl(22) wird diese Geschwindigkeit am Austritt des Bilanzgebietes sowohl durch den Strömungsquerschnitt (Kontinuitätsgleichung Gl(6)) als auch durch die Größe der wirkenden Kräfte bestimmt, so dass im Bilanzelement von einer gleichmäßig beschleunigten/verzögerten Bewegung ausgegangen werden kann. Im Fall der isothermen Bedingungen fällt in Gl(30) für \mathbf{q} der rechte Term weg, weil dann der Dichtequotient **1** beträgt.

In Analogie zur Bahnkurve des schrägen Wurfs wird nun auf der Grundlage von der Gl(14) und mit den Gl(29) und (30) die Modellkonzeption für das Bilanzgebiet **I** des Freistrahls hergeleitet. Die Vektorgleichung in der **x-y**-Ebene lautet:

$$\bar{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{1,x} \mathbf{t}_{1,x} + \frac{\mathbf{a}_{1,x}^+ \mathbf{t}_{1,x}^2}{2} \\ \mathbf{c}_{1,y} \mathbf{t}_{1,y} + \frac{(\mathbf{a}_{1,y}^+ + \mathbf{a}_{1,y}^{++}) \mathbf{t}_{1,y}^2}{2} \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{1,x} + \mathbf{a}_{1,x}^+ \mathbf{t}_{1,x} \\ \mathbf{c}_{1,y} + (\mathbf{a}_{1,y}^+ + \mathbf{a}_{1,y}^{++}) \mathbf{t}_{1,y} \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,x}^+ \\ (\mathbf{a}_{1,y}^+ + \mathbf{a}_{1,y}^{++}) \end{pmatrix} \quad (31)$$

Hierin bedeutet $\bar{\mathbf{r}}$ den Ortsvektor (Bahnpunkt **x, y**). Aus der Gl(31) wird deutlich, dass sich beide **x-y**-Komponenten aus Termen der gleichförmigen und der gleichmäßig beschleunigten Bewegung zusammensetzen. Allerdings beinhaltet nach Gl(32) die Beschleunigung der **y**-Komponente $\bar{\mathbf{a}}_{1,y}$ zwei Anteile: Den Ersten für die Linearbewegung $\bar{\mathbf{a}}_{1,y}^+$ und den Zweiten für den Auftrieb/Abtrieb $\bar{\mathbf{a}}_{1,y}^{++}$.

$$\bar{\mathbf{a}}_{1,y} = \bar{\mathbf{a}}_{1,y}^+ + \bar{\mathbf{a}}_{1,y}^{++} \quad (32)$$

Wie im Folgenden noch dargelegt wird, ist in den Gln(31) und (32) die Bewegungen des Freistrahls im Bilanzgebiet je nach Vorzeichen der Größe \bar{a} beschleunigt oder verzögert, bzw. in den Wirkungsrichtungen nach unten oder nach oben gerichtet. Die prinzipielle Vorgehensweise zur Lösung der Modellgleichungen Gln(29) bis (32) für das Bilanzgebiet I, aber auch für alle nachfolgenden Bilanzgebiete II, III, IV, ... ist:

- a.
 1. Variation des Neigungswinkels β_1 in einem Erwartungsbereich.
 2. Berechnung der Lineargeschwindigkeit \bar{c}_1 mit der Gl(30) und deren Zerlegung in die Komponenten $\bar{c}_{1,x}$ und $\bar{c}_{1,y}$ sowie die Berechnung der Komponenten des Bilanzgebietes $l_{1,x}$ und $l_{1,y}$.
 3. Berechnung der Komponenten der Linearbeschleunigung $\bar{a}_{1,x}^+$ und $\bar{a}_{1,y}^+$.
 4. Berechnung der Beschleunigung durch den Auftrieb/Abtrieb $\bar{a}_{1,y}^{++}$.
 5. Zusammenfassung beider Beschleunigungsanteile nach Gl(32) zur Gesamtbeschleunigung $\bar{a}_{1,y}$.
 6. Berechnung der Bewegungszeiten der Komponenten $t_{1,x}$ und $t_{1,y}$.
- b. Grafische Lösung der Modellgleichungen über die Bewegungszeiten und Ermittlung des Winkels β_1 .
- c. Berechnung des Bahnpunktes x_1 und y_1 .
- d. Berechnung der Temperaturen und der Stoffwerte des Freistrahls- und des Umgebungswassers an der Stelle I für die nachfolgende Berechnung des nächsten Bilanzgebietes II.

Die in den Punkten a. bis d. zu verwendenden Bedingungen und weiteren Gleichungen lauten:

zu a.1.: Variation des Winkels β_1 in einem Erwartungsbereich z.B.: **30...32...34°**.

zu a.2.: Die Berechnung der Komponenten der Lineargeschwindigkeit und des Bilanzgebietes erfolgt mit den Gln(33):

$$\begin{array}{ll}
 \underline{\text{x - Komponente:}} & \underline{\text{y - Komponente:}} \\
 \bar{c}_{1,x} = \bar{c}_1 \sin \beta_1 & \bar{c}_{1,y} = \bar{c}_1 \cos \beta_1 \\
 l_{1,x} = l_1 \sin \beta_1 & l_{1,y} = l_1 \cos \beta_1
 \end{array} \quad (33)$$

zu a.3.: Um die Linearbeschleunigung/Linearverzögerung für die einzelnen Komponenten zu erhalten, wird folgende Gleichung der Kinematik Gl(13) angewendet:

$$\bar{a}_{1,x}^+ = \frac{\bar{c}_{1,x}^2 - \bar{c}_{2,x}^2}{2 l_{1,x}} \quad \bar{a}_{1,y}^+ = \frac{\bar{c}_{1,y}^2 - \bar{c}_{2,y}^2}{2 l_{1,y}} \quad (34)$$

zu a.4.: Der zweite Beschleunigungsanteil für den Auftrieb/Abtrieb kann über eine Kräftebilanz für das Bilanzgebiet I hergeleitet werden. Die Differenz aus Schwer- und Auftriebskraft bewirkt nach dem 2. NEWTON'schen Gesetz eine Beschleunigungskraft $\bar{F}_{a,1,y}$, die eine Auslenkung des Freistrahls zu einer Bahnkurve bewirkt. Es gilt:

$$\vec{F}_{a,l,y} = \vec{F}_{G,l} - \vec{F}_{A,l} \quad (35)$$

mit:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{a,l,y} &= m_l \vec{a}_{l,y}^{++} = \rho_{ww,2} V_l \vec{a}_{l,y}^{++} \\ \vec{F}_{G,l} &= m_l \vec{g} = \rho_{ww,2} V_l \vec{g} \\ \vec{F}_{A,l} &= \rho_{kw,2} V_l \vec{g} \end{aligned} \quad (36)$$

Aus den Gln(35) und (36) folgt:

$$\vec{a}_{l,y}^{++} = \left(1 - \frac{\rho_{kw,2}}{\rho_{ww,2}} \right) \vec{g} \quad (37)$$

mit: $\vec{g} = -9,81 \text{ m/s}^2$

Der Negativwert der Erdbeschleunigung \vec{g} bedeutet die natürliche Wirkungsrichtung senkrecht von oben nach unten. Wenn im Fall des Auftriebs den Freistrah Wasser tieferer Temperatur umgibt und sich im Freistrah Wasser höherer Temperatur befindet, wird die Gl(37) für den nach unten gerichteter Freistrah einen positiven Wert liefern.

Dadurch wirkt diese Beschleunigung $\vec{a}_{l,y}^{++}$ der Erdbeschleunigung entgegen und ist dem zufolge nach oben gerichtet, was für den schräg nach unten gerichteten Freistrah zur erwähnte Bahnkurve führt.

Im Fall des Abtriebes wird $\vec{a}_{l,y}^{++}$ negativ und der nach oben gerichtete Freistrah wird wieder nach unten gelenkt.

Im Fall der isothermen Bedingung wird $\vec{a}_{l,y}^{++} = 0$.

zu a.6.: Die Bewegungszeiten der Strömung im Bilanzgebiet I bezogen auf die Komponenten ergeben sich aus der Gl(38).

$$\begin{array}{cc} \text{x - Komponente} & \text{y - Komponente} \\ \underline{t_{l,x} = \frac{\vec{c}_{l,x} - \vec{c}_{2,x}}{\vec{a}_{l,x}}} & \underline{t_{l,y} = \frac{\vec{c}_{l,y} - \vec{c}_{2,y}}{\vec{a}_{l,y}}} \end{array} \quad (38)$$

zu b.: Die grafische Darstellung der Bewegungszeiten $t_{l,x}(\beta_1)$ und $t_{l,y}(\beta_1)$ weisen in der Abhängigkeit zum Strömungswinkel β_1 eine gegenläufige Tendenz auf, so dass sich in Verbindung mit Gl(39) ein Schnittpunkt ergibt, welcher als Lösung des gesamten mathematischen Modells Gln(30) bis (39) verstanden wird .

$$t_{l,x}(\beta_1) = t_{l,y}(\beta_1) \quad (39)$$

Bei nichtisothermen Bedingungen folgt für den Winkel $\beta_2 \neq \beta_1$. Nur im isothermen Fall bleiben diese Winkel konstant.

zu c.: Der neue Bahnpunkt an der Stelle **I** ergibt sich aus dem vorhergehenden Bahnpunkt an der Stelle **2** sowie den **x**- und **y**-Komponenten für die Länge ℓ des Bilanzelementes. Es gilt:

$$\begin{array}{ll} \underline{\mathbf{x}\text{-Komponente}} & \underline{\mathbf{y}\text{-Komponente}} \\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 + \ell_{1,x} & \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \ell_{1,y} \end{array} \quad (40)$$

zu d.: Das negative Vorzeichen für $\ell_{1,y}$ ergibt sich durch Richtung nach unten. Wie schon erwähnt, wird vorausgesetzt, dass sich der Volumenstrom am Austritt des Bilanzelementes aus Massen/Massenströmen unterschiedlicher Temperatur zusammensetzen, die sich vollkommen vermischen. Dabei stellt sich im Freistrah entsprechend der Gl(7) eine mittlere Temperatur \bar{T} ein.

Das Bild 5 zeigt für das Bilanzgebiet **I** eine Teilansicht aus Bild 4. Für die Energiebilanz sind die Größen Temperatur, Dichte und Masse für das kalte und das warme Wasser enthalten. Der innenliegende Zylinder des Kegelstumpfes wird aus dem Wasser höherer Temperatur $T_{ww,2}$ mit der kleineren Dichte $\rho_{ww,2}$ und der Flankenkörper des Kegelstumpfes aus dem Wasser tieferer Temperatur $T_{kw,2}$ mit der höheren Dichte $\rho_{kw,2}$ gebildet.

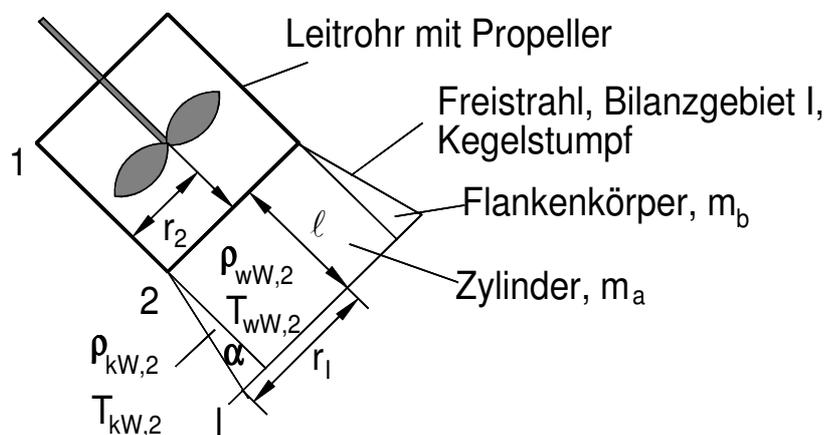


Bild 5 Bilanzgebiet **I** des Freistrahls mit Größen der für die thermische Energiebilanz

Aus Bild 5 wird ersichtlich, dass in Gl(7) der Kegelstumpf die Masse des innenliegenden Zylinders m_a , die Masse des Flankenkörpers m_b und die Gesamtmasse m_{ges} beinhaltet. Es gilt:

$$\begin{aligned} m_a &= \pi r_2^2 \ell \rho_{ww,2} \\ m_b &= \left[\frac{\ell \pi}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) - \pi r_2^2 \ell \right] \rho_{kw,2} \end{aligned} \quad (41)$$

In Verbindung mit Gl(7) wird für die mittlere Temperatur des Freistrahlwassers $\bar{T}_{ww,I}$ erhalten:

$$\bar{T}_{ww,I} = \frac{r_2^2 \rho_{ww,2} T_{ww,2} + \frac{1}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 - 2 r_2^2) \rho_{kw,2} T_{kw,2}}{r_2^2 \rho_{ww,2} + \frac{1}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 - 2 r_2^2) \rho_{kw,2}} \quad (42)$$

Die in Gl(42) notwendigen Temperaturen und Dichten an der Stelle **2** werden über die Gln(10) und (11) berechnet und danach auch die Dichten und die Temperaturen an der Stelle **I**. Diese Temperaturen und Dichten an der Austrittsstelle **I** sind identisch mit denen der Eintrittsstelle des Bilanzgebietes **II**, so dass sich nun mit den Gln(30) bis (42) eine zweiter Rechengang und für die folgenden Bilanzgebiete die weiteren Rechengänge anschließen.

7. Exemplarische Berechnungen von Bahnkurven mit MathCad

Die gesamte Modellkonzeption Gln(6) bis (42) ist mit der Software MathCad prime 1.0 in verschiedenen Beispielberechnungen angewendet worden, was im folgenden zusammengefasst werden soll.

Beispiel 1

Datei: "Modellrechnung Freistrahlanlage 12 30grad-s.mcdx" vom 19.02.2012

Dieses Beispiel bezieht sich u.a. auf:

- Elektrische Leistung des Propellers: **2 kW**
- Neigungswinkel des Leitrohres zur Senkrechten, β_2 : **30 °**
- Leitrohrradius der Anlage r_2 : **0,7 m**
- Strömungskinetische Konstante der dynamischen Viskosität Gl(12), K_1 : **1**
- Temperatur des Gewässers
 - Oberfläch: **20 °C**
 - **10 m** Tiefe: **15 °C**
- Flankenwinkel des Freistrahls, (Kegelstumpf) Gl(21), α : **15 °**

Die MathCad-Datei umfasst für **19 (XIX)** berechnete Bilanzgebiete des Freistrahls insgesamt 84 Arbeitsblätter, so dass auf deren Veröffentlichung in dieser Arbeit verzichtet werden muss.

Im Anhang Abschnitt 12.1. sind allerdings die ersten 7 Blätter der Berechnung bis einschließlich zum Bilanzelement **I** enthalten.

Folgende Ergebnisse lassen sich für das Leitrohr (Stelle **2**) und für den Austritt des Bilanzgebietes **I** (Stelle **I**) zusammenfassen:

	Stelle 2	Stelle I
Neigungswinkel, $[\beta] = ^\circ$	30	30,62
Geschwindigkeit, $[\vec{c}] = \text{m/s}$	0,97	0,7
Volumenstrom, $[\dot{V}] = \text{m}^3/\text{s}$	1,49	2,06
Impulsstrom, $[\vec{I}] = \text{N}$	$1,444 \cdot 10^3$	$1,44 \cdot 10^3$
Bahnpunkt, $[\mathbf{x}; \mathbf{y}] = \text{m}$	0,75; -2,7	1,26; -3,56

Tabelle 2 Ergebnisse der Freistrahlberechnung für das Bilanzgebiet **I**,
Beispiel 1, MathCad-Datei:
"Modellrechnung Freistrahlanlage 12 30grad-s.mcdx"
siehe Anhang, Abschnitt 12.1. (Auszug)

Aus Tabelle 2 kann entnommen werden, dass sich der Neigungswinkel des Freistrahls β zur Senkrechten für das Bilanzgebiet **I** im Vergleich zum Leitrohr Stelle **2** etwas vergrößert hat. Diese geringfügige Erhöhung resultiert aus dem noch geringen Auftrieb des Freistrahls an dieser Stelle.

Diese Wirkung des Auftriebs im Rechengang ist im Anhang Abschnitt 12.1. auf der Seite 5 der MathCad-Datei an Hand der Zahlenwerte für die Vertikalbeschleunigungen zu sehen. Die Beschleunigung der Linearbewegung $\vec{a}_{i,y}^+$ ($a_{i,y1}$) weist ein negatives Vorzeichen auf und stellt demnach für die Bewegung nach unten eine Verzögerung dar. Die Beschleunigung durch den Auftrieb $\vec{a}_{i,y}^{++}$ ($a_{i,y2}$) weist durch das positive Vorzeichen die Wirkungsrichtung entgegen der Schwerebeschleunigung \mathbf{g} nach oben auf. Die Summe der beiden Vektoren die Gesamtbeschleunigung $\vec{a}_{i,y}$ ($a_{i,y}$) ergibt ein negatives Vorzeichen, was auf die Bewegungsrichtung nach unten hindeutet. Damit ist der Freistrahlm im Bilanzgebiet **I** weiterhin nach unten gerichtet, wird aber durch den Auftrieb verzögert.

Erst nach Durchlaufen des Umkehrpunktes wird diese Gesamtbeschleunigung positiv, was im Bilanzgebiet **XI** bei dem Winkel $\beta_{x1} = 104,07^\circ$ geschehen ist (siehe Anhang Abschnitt 12.2. Seite 45 der MathCad-Datei).

Die weiteren Ergebnisse sind direkt dem Anhang Abschnitt 12.1. zu entnehmen.

Die Ergebnisse sämtlicher Bilanzgebiete wurden in folgenden grafischen Darstellungen Bilder 6 bis 10 zusammengefasst. Dabei werden jeweils die ersten beiden Punkte durch das Leitrohr repräsentiert (wie auch in allen folgenden Bildern).

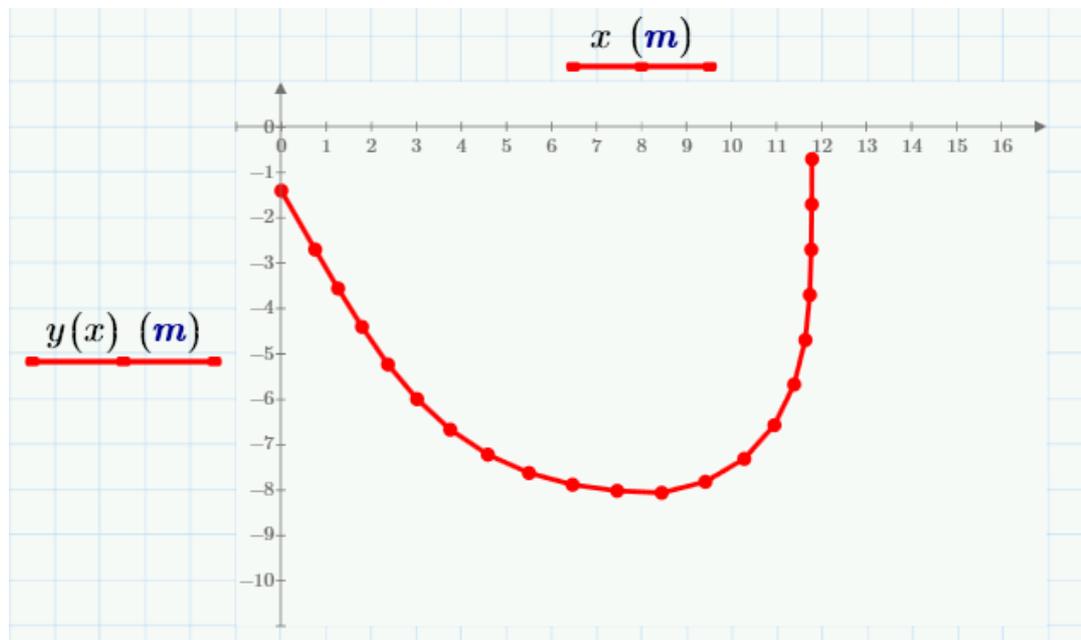


Bild 6 Bahnkurve des Freistrahls, Beispiel 1

Punkte 1-2: Leitrohr

Punkte 3-21: Freistrahl

Das Bild 6 zeigt, dass die Bahnkurve unter den gewählten Bedingungen eine begrenzte örtliche x - y -Ausbreitung hat, horizontal von ca. **12 m** und vertikal von ca. **-8 m**. Nach den **XIX** gerechneten Bilanzgebieten hat der Freistrahls wieder die Wasseroberfläche erreicht.

Gemäß der getroffenen Annahmen für die Modellierung, Vernachlässigung der inneren Reibung und der gewählten strömungskinetischen Konstante $K_1 = 1$, stellt diese erhaltene Bahnkurve in Bild 6 eine maximal mögliche x - y -Ausbreitung dar, die unter realen Bedingungen eher kleiner ausfällt. Somit wird deutlich, dass solche Bahnkurven den Wassertransport von der Oberfläche in tiefere Ebenen des Gewässers und damit auch die Belüftung sowie die Durchmischung des Gewässers stark einschränken.

Im Bild 7 sind die berechneten Temperaturverläufe des Freistrahls (rot) und des Umgebungswassers (blau) entlang der Bahnkurve zu sehen.

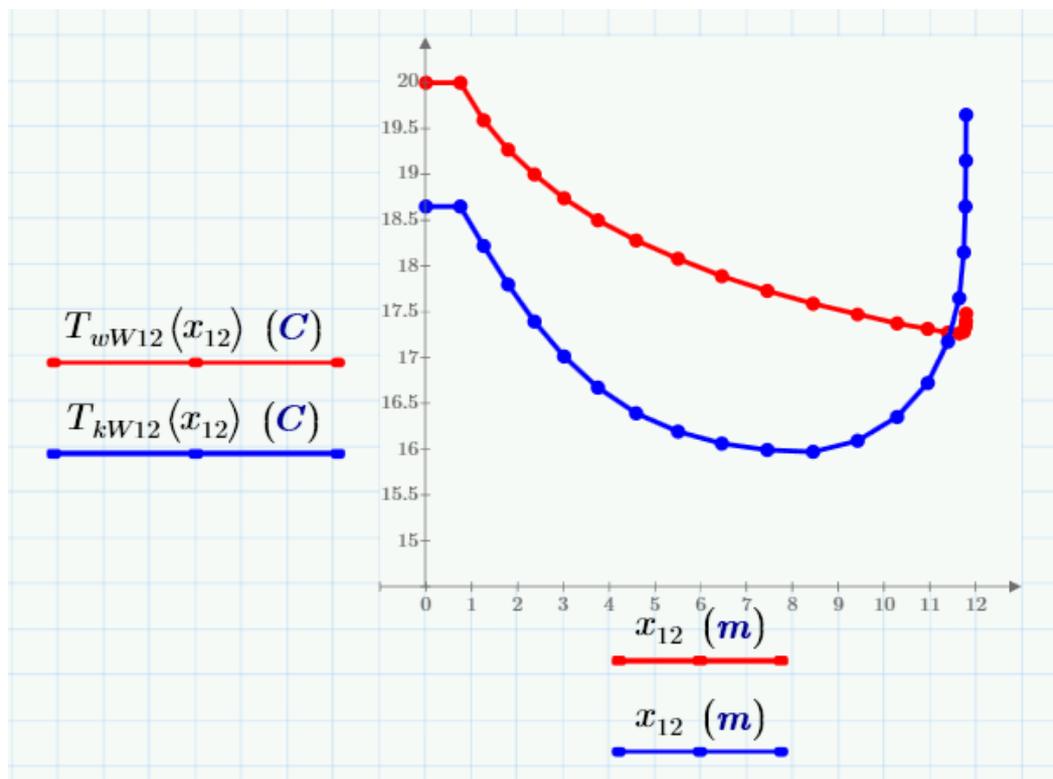


Bild 7 Temperaturverläufe des Freistrahlwassers (rot) und des Umgebungswassers (blau) entlang der Bahnkurve, Beispiel 1

Bis zum Schnittpunkt beider Temperaturverläufe hat das Freistrahlwasser eine höhere Temperatur (kleinere Dichte) als das Umgebungswasser (größere Dichte), was die Auslenkung des Freistrahls nach oben begründet. Dabei wird der Freistrah zunächst verzögert, um nach dem Umkehrpunkt wieder beschleunigt zu werden.

Nach dem Schnittpunkt der beiden Kurvenverläufe in Bild 7 ist der Freistrah in der Aufwärtsbewegung und das Freistrahwasser hat nun eine tiefere Temperatur als das Umgebungswasser. Dabei erfährt er einen Abtrieb. Wegen der fast vertikalen Bewegungsrichtung des Freistrahles kommt es allerdings nicht zu einer weiteren Bahnkurvenumkehrung, sondern nur zu einer weiteren, allerdings sehr starken Verzögerung der Aufwärtsbewegung.

Im Bild 8 ist die Lineargeschwindigkeit des Freistrahls als Funktion der horizontalen Streck x für die einzelnen Bilanzgebiete zu sehen. Die Geschwindigkeitsreduktion im Verlauf des Freistrahls ist vor allem auf seine kegelförmige Erweiterung des Strömungsquerschnitts zurückzuführen. Allerdings wird die Geschwindigkeit auch durch die auftriebsbedingte Beschleunigung/Verzögerung beeinflusst. Der sehr starke Geschwindigkeitsabfall für die letzten Bilanzelemente lässt sich durch den Abtrieb erklären.

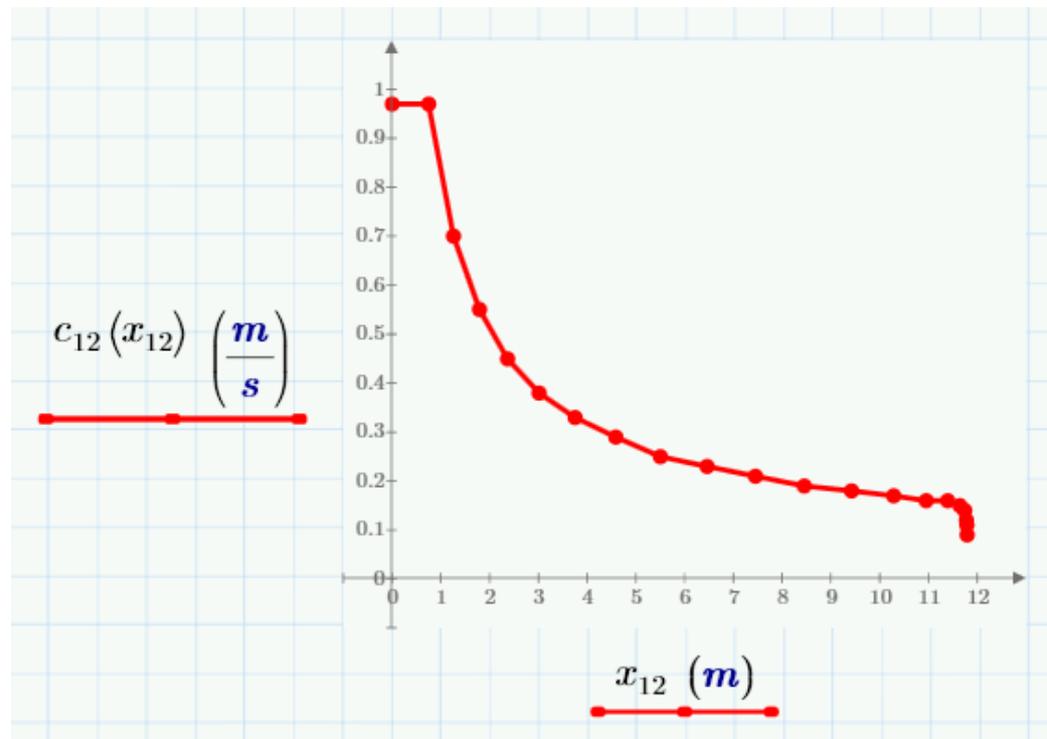


Bild 8 Lineargeschwindigkeit des Freistrahls, Beispiel 1

In den Bildern 9 und 10 werden der Volumen- und der Impulsstrom für die einzelnen Bilanzgebiete grafisch dargestellt. Die starken Funktionsabfälle im Bereich der letzten Bilanzgebiete lassen sich vor allem auf die große Geschwindigkeitsreduktion durch die abtriebsbedingte Verzögerung zurückführen, die auch bereits im Bild 8 zum Ausdruck kam.

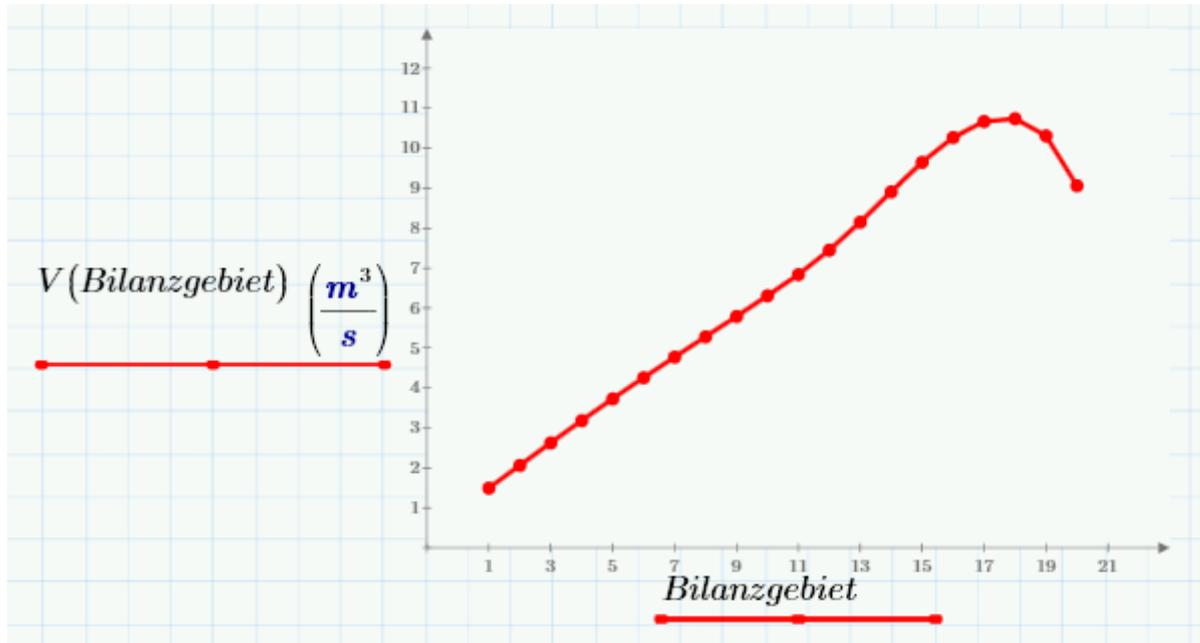


Bild 9 Volumenstrom am Austritt der einzelnen Bilanzgebiete, Beispiel 1

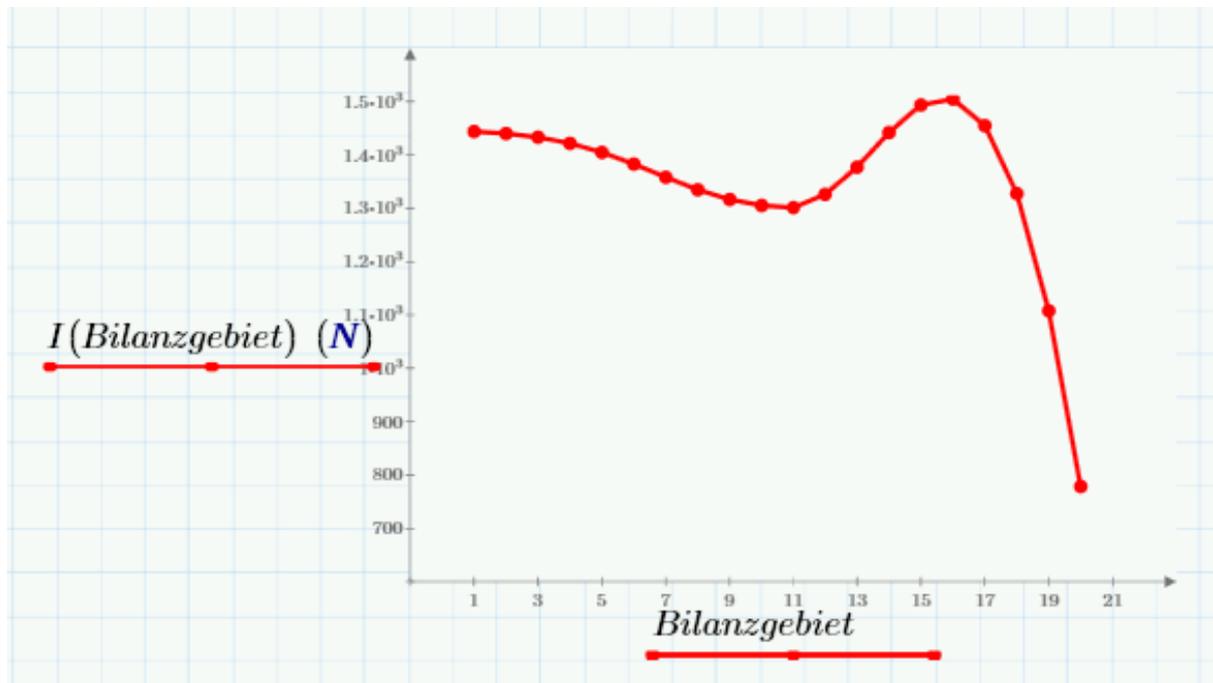


Bild 10 Impulsstrom am Austritt der einzelnen Bilanzgebiete, Beispiel 1

Beispiel 2

Datei: "Modellrechnung Freistrahlanlage 13 30grad-s.mcdx" vom 20.02.2012

Im Beispiel 2 sollen die gleichen Annahmen wie für das Beispiel 1 getroffen werden, mit der Ausnahme, dass isotherme Bedingungen im Gewässer vorherrschen und demzufolge kein Auftrieb/Abtrieb auf den Freistrahls wirken kann. Die Bewegung des Freistrahls ist daher erwartungsgemäß für wiederum **19** berechnete Bilanzgebiete eine Gerade, die auch im Bild 11 durch die Funktion **13** zum Ausdruck kommt.

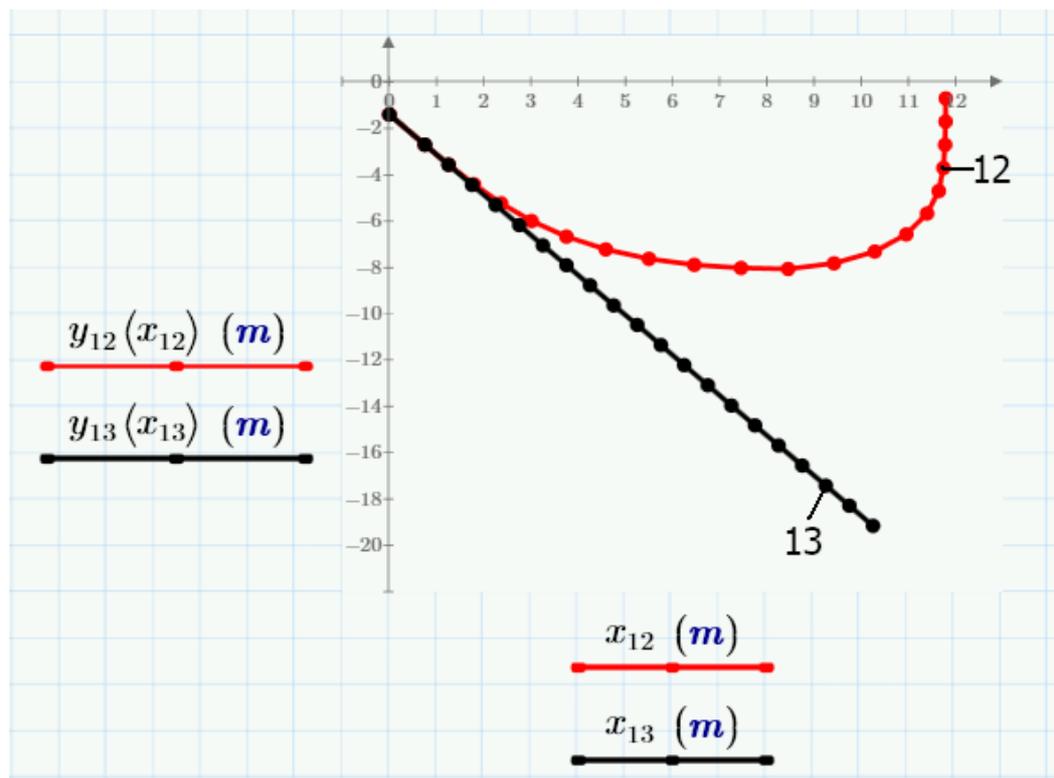


Bild 11 Linearer Verlauf des Freistrahls **13**, isotherm, Beispiel 2 und Bahnkurve des Freistrahls **12**, nichtisotherm, Beispiel 1

Diese Funktion **13** im Bild 11 verdeutlicht den unveränderlichen Neigungswinkels des Freistrahls, der durch den Neigungswinkel des Leitrohres β_2 bestimmt wird. Zum Vergleich wird die Bahnkurve 12 aus Beispiel 1 nochmals mit dargestellt.

Das Ergebnis der Berechnungen zum isothermen Fall zeigt deutlich, dass das Freistrahlswasser bis in tiefste Bereiche eines Gewässers vordringen kann, wenn keine Temperaturdifferenz zwischen der Oberfläche und der Tiefe im Gewässer vorliegt. Daher ist nur bei isothermen Bedingungen im Gewässer eine sehr weitläufige Ausbreitung des Freistrahls vorstellbar.

Als weiteres Ergebnis der Berechnungen soll das Verhalten des Volumen- und des Impulsstromes für die einzelnen Bilanzgebiete dargestellt werden.

Das Bild 12 zeigt einen linearen Volumenstromzuwachs in den einzelnen Bilanzgebieten, weil durch die isothermen Bedingungen im Gewässer keine auftriebsbedingten Beschleunigungen/Verzögerungen auftreten können.

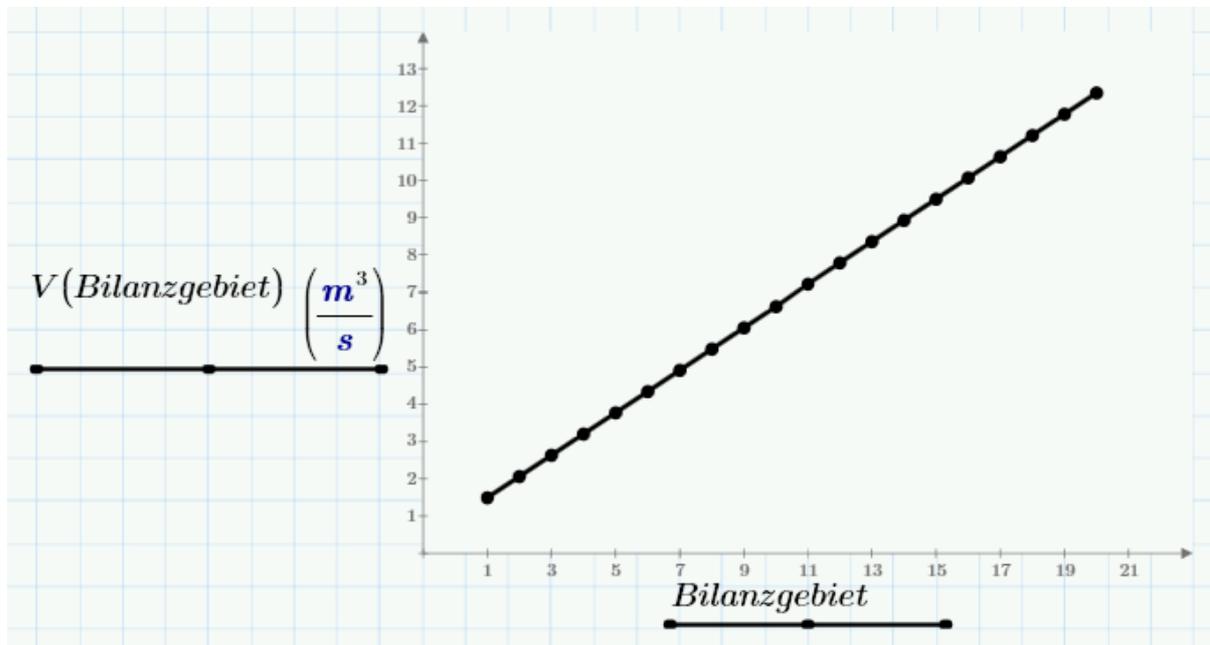


Bild 12 Volumenstrom am Austritt der einzelnen Bilanzgebiete, isotherm, Beispiel 2

Der Impulsstrom ist in den einzelnen Bilanzgebieten stets konstant und beträgt für alle Bilanzgebiete I bis XIX jeweils: $\bar{T} = 1,444 \cdot 10^3 \text{ N} = \text{konst.}$

In diesem Beispiel 2 sind die Ergebnisse des konstanten Impulsstromes und des linearen Volumenstromzuwachses für isotherme Bedingungen im Bild 12 im Vergleich zu den Literaturmodellen Gln(1) bis (5) qualitativ ebenfalls erhalten worden. Ein quantitativer Vergleich ist allerdings nur bedingt möglich, weil sich die über die Literaturmodelle erhaltenen Daten in Tabelle 1 auf eine kleinere Freistrahlanlage beziehen. Der Vergleich ergibt Folgendes:

Mit den Literaturmodellen wird nach einer Strahllänge von **20 m** eine maximale Strömungsgeschwindigkeit für den mittleren Stromfaden von **0,455 m/s** erhalten (siehe Tabelle 1). Wird die dazugehörige mittlere Strömungsgeschwindigkeit mit ca. **0,23 m/s** angenommen, dann ist sie in der gleichen Größenordnung, wie die im Beispiel 2 über **XIX** Bilanzelemente, d.h. nach **19 m**, berechnete Strömungsgeschwindigkeit von **0,12 m/s** (hier nicht dargestellt).

Für isotherme Gewässerbedingungen ist somit deutlich worden, dass sich mit der in dieser Arbeit weiterentwickelten Modellkonzeption Gln(6) bis (42) qualitativ und quantitativ vergleichbare Ergebnisse zu den genannten Literaturmodellen Gln(1) bis (5) erzielen lassen.

Beispiel 3

Datei: "Modellrechnung Freistrahlanlage 12-1 30grad-s.mcdx" vom 03.02.2012 und

Datei: "Modellrechnung Freistrahlanlage 12-2 30grad-s.mcdx" vom 20.02.2012

Bei den Berechnungen zu den Beispielen 1 und 2 wurde die dynamische Viskosität des Wassers η_{kW} (Gl(24)) als reiner Stoffwert angenommen (laminare Strömung), was bei turbulenten Strömungsbedingungen zu erhebliche Fehlern führen würde.

In Gl(12) ist daher die kinetische Konstante K_1 enthalten, um den Einfluss der Turbulenz berücksichtigen zu können. Diese Konstante kann nur empirisch bestimmt werden, was erst einer Folgearbeit vorbehalten sein soll.

An dieser Stelle kann aber jetzt schon durch eine Variation dieser Konstante deren Einfluss auf die Bahnkurve des Freistrahls berechnet werden.

Ausgangspunkt für die Berechnungen sind die Bedingungen des Beispiels 1 und es wurden folgende Konstanten gewählt:

- Berechnung 12-1: $K_1 = 1000$
- Berechnung 12-2: $K_1 = 5000$

Die Ergebnisse ergeben im Vergleich zur Berechnung 12 aus Beispiel 1 die Funktionen im Bild 13.

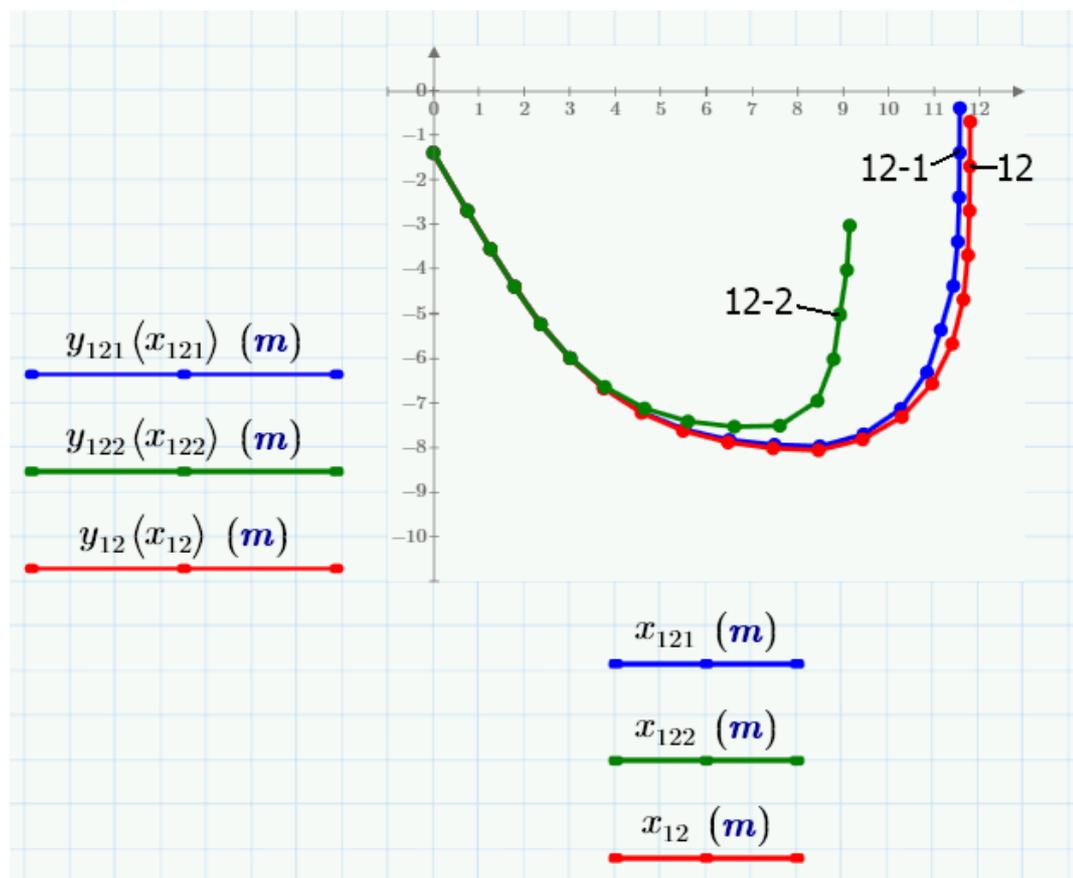


Bild 13 Bahnkurven bei verschiedenen strömungskinetischen Konstanten:
 Beispiel 3, $K_1 = 1000$ (12-1), $K_1 = 5000$ (12-2)
 Beispiel 1, $K_1 = 1$ (12) zum Vergleich

Das Bild 13 zeigt die Reduzierung der Strahlausbreitung, wenn die kinetische Konstante K_1 vergrößert wird. Dieses Ergebnis ist erwartungsgemäß, da sich mit der Vergrößerung dieser Konstante auch die Einsaugung von Umgebungswasser in den Freistrahл vergrößert, was seine Geschwindigkeit reduziert.

Im Fall **12-1** ($K_1 = 1000$) gelangt der Freistrahл nach den **19 (XIX)** Bilanzgebieten wieder zur Wasseroberfläche, während im Fall **12-2** ($K_1 = 5000$) die Geschwindigkeit praktisch so klein wird, dass dieser schon nach dem Bilanzgebiet **14 (XIV)** zur Ruhe kommt.

Aus diesen Ergebnissen kann geschlussfolgert werden, dass die Bahnkurve von Beispiel 1, wenn die dynamische Viskosität des Wassers für eine laminare Strömung voraussetzt wird, sich der Idealfall einer maximalen Freistrahlausbreitung ergibt. Im Realfall, wenn die dynamische Viskosität einer turbulenten Strömung gilt, reduziert sich die Strahlausbreitung deutlich.

Beispiel 4

Datei: "Modellrechnung Freistrahlanlage **12 60grad-s.mcdx**" vom 28.02.2012

Das Beispiel 1 bezieht sich auf den Neigungswinkel des Leitrohres zur Senkrechten β_2 von **30 °**. In diesem Beispiel 4 wird nun der Winkel **60 °** zur Senkrechten gewählt und er ist damit so groß, wie in den Freistrahlanlagen BANT 1 und 2. Alle anderen Bedingungen sind so wie im Beispiel 1 gewählt worden.

Im Bild 14 ist zu sehen, dass die Bahnkurve bei **60 °** (12-60) selbstverständlich flacher beginnt und dann im Umkehrpunkt nur etwa die Hälfte der Tiefenlage von der Bahnkurve mit dem Startwinkel **30 °** (12-30) erreicht.

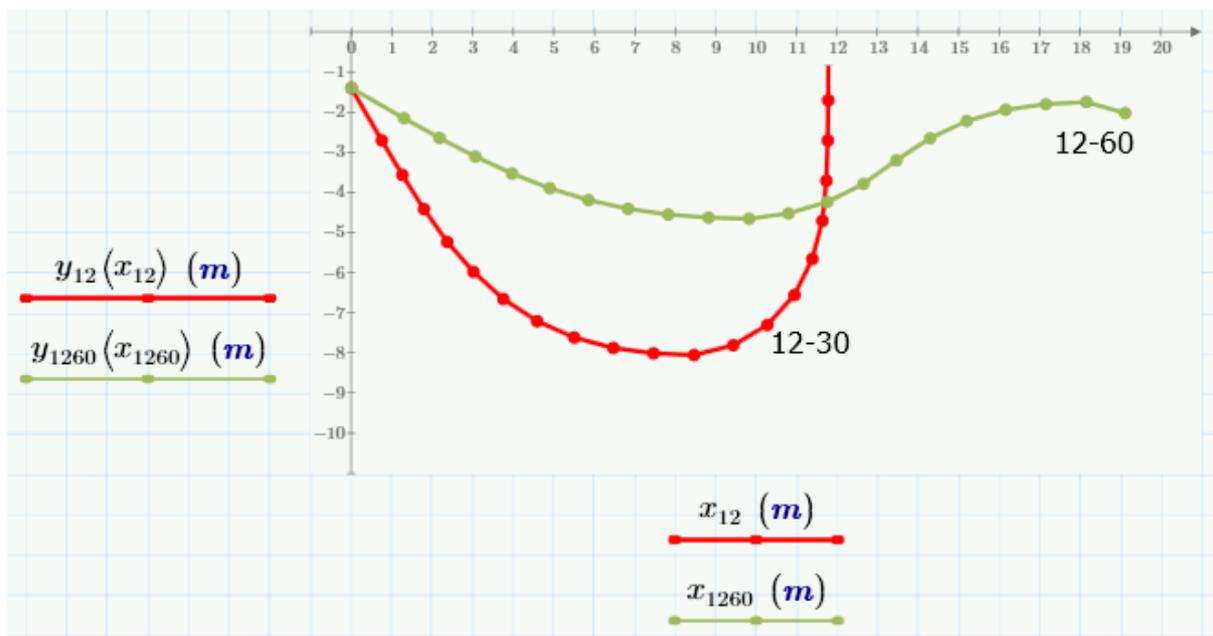


Bild 14 Bahnkurven des Freistrahls:
 Beispiel 4, $\beta_2 = 60^\circ$ zur Senkrechten (12-60)
 Beispiel 1, 30° zur Senkrechten (12-30) zum Vergleich

Die Bahnkurve **12-60** verlängert sich und weist im weiteren Verlauf einen zweiten Umkehrpunkt auf. Dieser zweite Umkehrpunkt stellt sich ein, weil der Freistrahl nach dem ersten Umkehrpunkt Umgebungswasser tiefere Temperatur (größerer Dichte) ansaugt und es in obere Bereiche des Umgebungswassers höherer Temperatur (kleinerer Dichte) transportiert. Dadurch wird der Freistrahl weiter verzögert und wegen des Abtriebes und seiner flachen Wirkungsrichtung nach unten abgelenkt.

Es kann deshalb festgestellt werden, dass mit Vergrößerung des Leitrohrwinkels β_2 die Tiefenwirkung im Gewässer ab- und die horizontale Wirkung zunimmt.

Beispiel 5

Datei: "Modellrechnung Freistrahlanlage **12 60grad-s 4.mcdx** vom 05.04.2012

Dieses Beispiel 5 baut auf dem Beispiel 4 auf, wobei aber die elektrische Leistung für den Antrieb des Propellers um den Faktor $F = 4$ vergrößert wurde, welche nun einer elektrischen Leistung von **8 kW** entspricht. Mit dieser Berechnung soll ermittelt werden, wie sich bei einem Anstellwinkel des Leitrohres von 60° zur Senkrechten (wie bei den Anlagen BANT 1 und 2) die Eindringtiefe des Freistrahls in die Gewässertiefe verändern würde. Im Bild 15 ist die Bahnkurve des Beispiels 5 (12-60-4) im Vergleich zum Beispiel 4 (12-60) zu sehen.

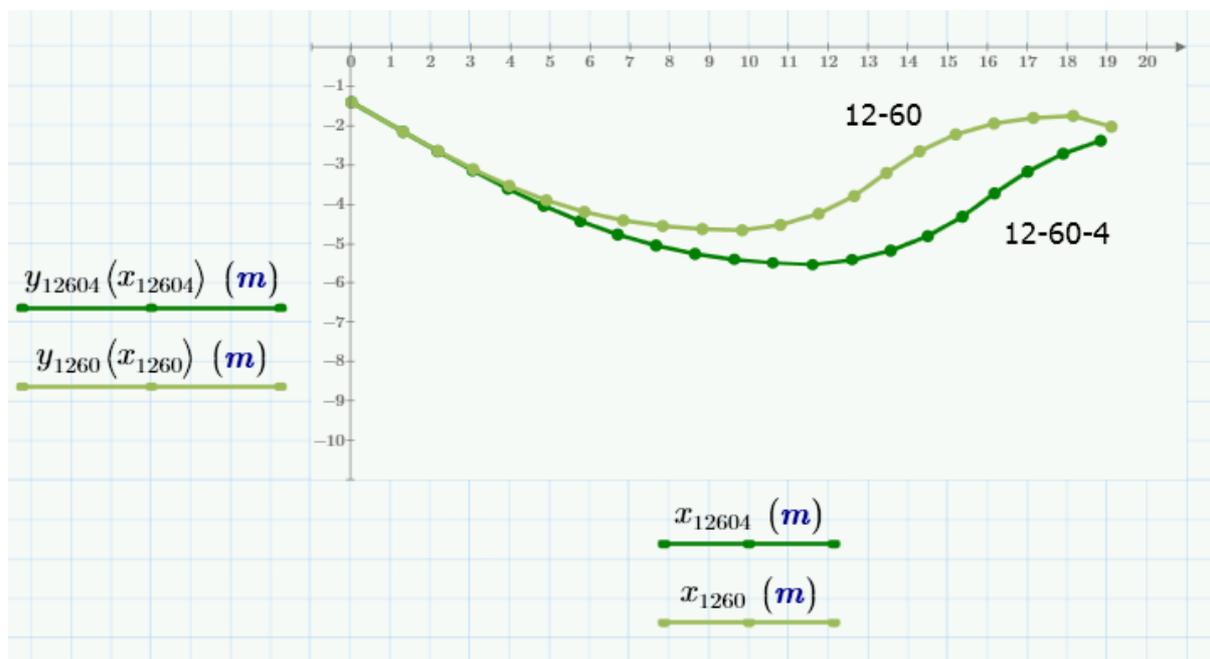


Bild 15 Bahnkurven des Freistrahls bei $\beta_2 = 60^\circ$ zur Senkrechten:
 Beispiel 5, Leistungsfaktor $F = 4$ (12-60-4)
 Beispiel 4, Leistungsfaktor $F = 1$ (12-60) zum Vergleich

Auch bei einer **4-fachen** Vergrößerung der elektrischen Antriebsleistung für den Propeller und der sich daraus ergebenden Vergrößerungen der Geschwindigkeit und des Volumenstromes des Freistrahles, erhöht sich die Eindringtiefe des Freistrahles nur geringfügig von **-4,6 m** (vergl. Beispiel 4) auf **-5,5 m**. Dieses Ergebnis lässt außerdem den Schluss zu, dass der Anstellwinkel in den Anlagen BANT 1 und 2 verkleinert werden sollte, um größere Tiefen des Gewässers mit dem Freistrahle erreichen zu können.

8. Schlussfolgerungen aus den Beispielberechnungen

Folgende Schlussfolgerungen sind aus den Beispielberechnungen zu ziehen:

- Eine Freistrahlanlage kann nur bei isothermen Bedingungen im Gewässer durch einen linearen Freistrahle sauerstoffreiches Wasser von der Oberfläche bis in tiefste Ebenen befördern und somit einen Beitrag zur Gewässerbelüftung und zur Durchmischung leisten.

Wenn mittels einer überschläglichen Berechnung davon ausgegangen wird, dass auch in der Tiefe von mehreren Metern noch sauerstoffreiches Wasser vorherrscht und sich dabei der Volumenstrom des Freistrahles im Bereich von **1,5** bis auf ca. **3,5 m³/s** vergrößert, dann würde sich bei einem Volumen des Banter Sees Wilhelmshaven von **11,5·10⁶ m³** /7/ für zwei Freistrahlanlagen folgender Zeitbereich ergeben:

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{V}{\dot{V}} && (43) \\
 &= \frac{11,5 \cdot 10^6 \text{ m}^3}{2 \cdot (1,5 \dots 3,5) \text{ m}^3 / \text{s} \cdot 3600 \text{ s} / \text{h}} \\
 t &= 1064,8 \dots 456,3 \text{ h} = \underline{\underline{44,3 \dots 19 \text{ Tage}}}
 \end{aligned}$$

Dieser Zeitbereich von **19 bis 44 Tagen** besagt, dass das gesamte Seewasser innerhalb von dieser Zeit mit sauerstoffreichem Wasser in Kontakt getreten ist und sich mit Sauerstoff anreichern konnte.

Bei isothermen Bedingungen stellt diese Zeit somit auch die Wirkungszeit der Freistrahlanlagen im Banter See dar, d.h. eine kurzfristige Wirkung auf die vertikale Temperaturdifferenz innerhalb weniger Tage ist daher nicht denkbar (vergl. Bild 3).

- Isotherme Bedingungen im Gewässer können sich sowohl in den Wintermonaten einstellen als auch in den Sommermonaten dann, wenn durch Starkwindereignisse eine Durchmischung des Gewässers und damit ein vertikaler Temperaturengleich stattfindet, der von der Wasseroberfläche ausgeht oder wenn sich in einer sommerlichen Kaltwetterperiode durch die fehlende Sonneneinstrahlung keine vertikalen Temperaturgradienten ausbilden.

- Bei einer vertikalen Temperaturdifferenz um **5 K** ist für den Freistrahls eine ausgeprägte Bahnkurve im Gewässer zu erwarten. Bei einem Anstellwinkel des Leitrohres von **30 °** zur Senkrechten kann bestenfalls eine Tiefenlage von nur **-8 m** und die horizontale Weite um die **12 m** erreicht werden. Der Freistrahls steigt wieder zur Wasseroberfläche auf.
Wird der Anstellwinkel des Leitrohres wie im Fall der Freistrahlanlagen im Banter See Wilhelmshaven auf **60 °** vergrößert, dann verläuft die Bahnkurve flacher und die erreichbare Tiefenlage beträgt nur noch ca. **-4,5 m**, wobei sich aber die horizontale Weite verlängert. Der Anstellwinkel des Leitrohres sollte daher bei **30 °** zur Senkrechten betragen.
Bei einer vertikalen Temperaturdifferenz von **5 K**, können Freistrahlanlagen keinen Beitrag zur Belüftung und zur Durchmischung von Tiefenwasser eines Gewässers leisten. Das ist erst dann wieder möglich, wenn zuvor Windereignisse für isotherme Bedingungen im Gewässer gesorgt haben.
- Eine Leistungsvergrößerung der Freistrahlanlage um den Faktor **F = 4** erbringt keine wesentliche Vergrößerung der Eindringtiefe des Freistrahls in das Gewässer, wenn der Winkel des Leitrohres der Anlage mit **60 °** zur Senkrechten beträgt. Die Eindringtiefe erhöht sich dabei lediglich auf **-5,5 m**.
- Die Freistrahlausbreitung hinsichtlich seiner Tiefe und seiner Weite in einem Gewässer verringert sich, wenn von realen strömungskinetischen Bedingungen für das Ansaugen turbulenten Umgebungswassers in den Freistrahls ausgegangen wird. Diese realen Bedingungen lassen sich durch die empirische Konstante der dynamischen Viskosität **K₁ >> 1** sehr leicht in die Modellkonzeption einarbeiten. Erst durch strömungskinetische Messungen am Freistrahls kann diese Konstante bestimmt werden (Folgearbeit).
- Für sämtliche Berechnungen wurde die Energiedissipation vernachlässigt, so dass alle erhaltenen Zahlenwerte aus den Berechnungen für die Ausbildung der Bahnkurven als Maximalwerte angesehen werden können, die in der Praxis eher kleiner ausfallen.

9. Zusammenfassung

Seit Jahren sind Freistrahlanlagen zur Gewässerbelüftung im Einsatz und es ist sehr wichtig, dass mittels mathematisch-physikalischer Modelle Vorausberechnungen zur Wirkung des Freistrahls im Gewässer vorgenommen werden. Dadurch lassen sich die Risiken und der Nutzen beim Betrieb solcher Anlagen besser einschätzen.

Bisherige Literaturmodelle beziehen sich jedoch nur auf isotherme Gewässerbedingungen, und es war daher nur möglich, für diesen Sonderfall eine lineare Freistrahlausbreitung zu berechnen.

In der vorliegenden theoretischen Arbeit zur Freistrahlausbreitung werden auf der Grundlage der Impulsstrombilanz vertikale Temperaturänderungen in einem Gewässer dahingehend berücksichtigt, dass der daraus folgende Auftrieb/Abtrieb den Freistrahls in eine Bahnkurven auslenkt.

Dadurch schränkt sich die Ausbreitung des Freistrahls für die Tiefe, aber auch für die horizontale Weite ein, was das Ziel der Gewässerbelüftung und -durchmischung für diese Fälle infrage stellen kann.

Die Bearbeitung der mathematisch-physikalischen Modellkonzeption wird mit einem abschnittsweisen Approximationsverfahren für einzelne Bilanzgebiete unter Einbeziehung von grafischen Lösungen vorgenommen, so dass mit ca. **20** verwendeter Bilanzgebieten von je **1 m** Länge die Bahnkurve gut nachgebildet werden kann.

In mehreren Beispielen werden verschiedene Bahnkurven berechnet und diskutiert. Dabei zeigte es sich, dass bei einer gewählten vertikalen Temperaturdifferenz im Gewässer von **5 K**, einem Anstellwinkel des Leitrohres der Freistrahlanlage von **30 °** zur Senkrechten und den weiteren Annahmen die Bahnkurve einen unteren Umkehrpunkt bei der Tiefe von ca. **-8 m** aufweist, die horizontale Ausbreitung bei ca. **12 m** begrenzt ist und der Freistrahл die Wasseroberfläche wieder erreicht.

Im isothermen Fall des Gewässers dagegen stellt sich ein linearer Freistrahл ein und es werden sehr tiefe Ebenen des Gewässers erreicht.

Die Berücksichtigung von einer empirischen Konstante für die turbulente dynamische Viskosität, die bei der reibungsbedingten Wasseransaugung über die Flanken des Freistrahls eine wichtige Rolle spielt zeigt, dass sich die Freistrahlausbreitung im Gewässer reduziert, je größer diese ist. Solch eine empirische Konstante muss über strömungskinetische Untersuchungen gemessen werden, was einer Folgearbeit vorbehalten sein soll.

Wird der Anstellwinkel des Leitrohres zur Senkrechten auf **60 °** vergrößert, halbiert sich die Wirkungstiefe des Freistrahls auf ca. **-4,5 m**, die auch bei einer Vervierfachung der elektrischen Leistung auf nur **-5,5 m** wieder vergrößert werden kann.

Daher kann geschlussfolgert werden, dass eine Freistrahlanlagen nur dann in der Lage ist, einen eigenen Beitrag zur Belüftung auch in den tiefen Ebenen des Gewässers zu leisten, wenn isotherme Bedingungen vorliegen.

Die berechneten Freistrahlausbreitungen stellen wegen der Vernachlässigung der Energiedissipation Maximalwerte dar, die in der Praxis eher kleiner ausfallen werden und daher als Richtwerte dienen können.

Eine direkte Überprüfung der Ergebnisse zur Freistrahlausbreitung an Hand des Anwendungsfalles Banter See Wilhelmshaven, ist wegen fehlender Messdaten nicht möglich. Die Wirkung der Freistrahlanlagen auf das Gewässer im Zusammenhang mit dem Wettergeschehen wird in einer Folgearbeit behandelt.

10. Symbolverzeichnis

Symbole

A	Fläche	m ²
a	Beschleunigung	m/s ²
a ⁺	Beschleunigungsanteil aus der Linearbewegung	m/s ²
a ⁺⁺	Beschleunigungsanteil aus dem Auftrieb/Abtrieb	m/s ²
c	Geschwindigkeit	m/s
d	Durchmesser	m
F	Kraft	N
F	Faktor der elektrischen Leistung	-
g	Erdbeschleunigung	m/s ²
I	Impulsstrom	N
K ₁	strömungskinetische Konstante	-
l _,	Länge eines Bilanzgebietes	m
l _R	Länge des Leitrohres der Freistrahlanlage	m
m	Masse	kg
\dot{m}	Massenstrom	kg/s
P	Momentanleistung	kW
r	Radius	m
Re	REYNOLDS-Zahl	-
s	Weg	m
T	Temperatur	°C
t	Zeit	s
u	spezifische innere Energie	J/kg
V	Volumen	m ³
\dot{V}	Volumenstrom	m ³ /s
x	Strecke des Freistrahles	m
y	Tiefenlage des Gewässers	m
x, y	x-, y-Koordinaten	

griechische Symbole

α	Neigungswinkel der Freistrahlfanken	°
β	Neigung der Freistrahlanlage zur Senkrechten	°
γ	Neigung der Freistrahlanlage zur Waagerechten	°
Δ	Differenz	-
ε	Neigungswinkel der vertikalen Temperaturfunktion	°
η	dynamische Viskosität	Pa s
ρ	Dichte	kg/m ³
τ	Schubspannung	N/m ²

Indices unten

a, b, ges	Masse a, b, gesamt
M	Mantel des Zylinders
R	Reibung
wW, kW, W	warmes Wasser, kaltes Wasser, Wasser
max	maximal
0,1,2,I,II,III,...	axiale Grenzen der Bilanzgebiete
1,2	Lösungen einer quadratischen Gleichung
x, y	in x-, y-Richtung
a, G, τ , A	auf die Beschleunigung der Bewegung, Erdbeschleunigung, Reibung, Auftrieb bezogen

Indices oben

\bar{x}	Mittelwert
\vec{x}	Vektor

11. Literatur

- /1/ Autorenkollektiv Lehrbuch der chemischen Verfahrenstechnik
Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie
Leipzig, 1968
- /2/ Brack, G.: Dynamische Modelle verfahrenstechnischer
Systeme
Reihe Automatisierungstechnik
Verlag Technik Berlin, 1972
- /3/ Projektteam: Prof. Dr. J. Michele; Prof. Dr. P. Lücking; Dipl.-Ing. S.
Engel; Dipl.-Ing. J. Scheltwort; Dipl.-Ing. R.
Liesegang; jetzt: Jade Hochschule, Studienort
Wilhelmshaven, Institut für Energie- Verfahrens- und
Umwelttechnik
- /4/ Lücking, P.: Vortrag zum Tag der offenen Tür an der
Fachhochschule in Wilhelmshaven, 18.11.2009
<http://evu.jade-hs.de/content/projekt-freistrahlanlagen-im-banter-see-wilhelmshaven>
Artikel "Veranlassung, technisch-biologische
Wirkungsweise" vom 30.01.2007
Anhang: Vortrag Lücking.pdf
"Freistrahlen zur besseren Durchmischung
stehender Gewässer am Beispiel Banter See"
Auftrag der Stadt Wilhelmshaven "Bekämpfung der
Blualgenproblematik im Banter See"
- /5/ Liebezeit, G.; Lücking, P.;
Michele, J.: Die Freistrahlanlage am Banter See
VDI/VDE-Vortrag an der Jade Hochschule,
Wilhelmshaven, 21.06.2011

-
- /6/ Michele, J.; Michele, V.:
The free jet as a means to improve water quality:
Destratification and oxygen enrichment
Limnologica 32(2002) 329 - 337
Urban & Fischer Verlag
- /7/ Lücking, P.; Scheltwort, J.;
Liesegang, R.:
Blaualgengproblematik Banter See
Jahresabschlussbericht Technik 2009
- /8/ Winter, B.:
Beitrag zur Bewertung der Freistrahlanlagen im
Banter See Wilhelmshaven im Zusammenhang mit
dem Wettergeschehen, Jahre 2007 bis 2011
Juli 2012,
über: <http://www.jade-hs.de/?id=8326>
- /9/ Bohl, W.:
Technische Strömungslehre
Vogel Buchverlag, Kamprath-Reihe: Technik
Würzburg, 1991
- /10/ Perry, R.F.:
Handbook of Chemical Engineering
New York, 1997
- /11/ Truckenbrodt, E.:
Fluidmechanik
Berlin, 1992
- /12/ Liepe, F.; u.a.:
Verfahrenstechnische Berechnungsmethoden
Teil 4: Stoffvereinigung in fluiden Phasen
VCH Verlagsgesellschaft mbH
Weinheim, 1988
Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie
Leipzig 1988
- /13/ Weiß/Militzer/Gramlich:
Thermische Verfahrenstechnik
Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie
Leipzig - Stuttgart, 1993
- /14/ Liebezeit, G.:
MarChemConsult, Varel
Ökologische Begleituntersuchungen zum Einsatz
von Freistrahlanlagen im Banter See,
Jahresberichte 2008-2011, hier Bericht 2011
http://evu.jade-hs.de/system/files/BS_Bericht%20%202011.pdf
- /15/ Aeschbach-Hertig, W.:
Physik aquatischer Systeme I
Universität Heidelberg, 2005/06
<http://www.iup.uni-heidelberg.de/institut/forschung/groups/aquasys/lehre/material/Kap1%20Wasser.pdf>
- /16/ Bohrmann/Pitka/Stöcker/
Terlecki:
Physik für Ingenieure
Verlag Harri Deutsch
Frankfurt a.M., Thun, 1993
- /17/ Siegloch, H.:
Technische Fluidmechanik
VDI-Verlag, Düsseldorf 1996

12. Anhang

12.1. Datei: "Modellrechnung Freistrahlanlage 12 30grad-s.mcdx" vom 19.02.2012) S. 1-7

Prof. Dr. B. Winter, Jade Hochschule

Modellrechnung Freistrahlanlage 12 30grad-s.mcdx, 19.02.2012

Modellrechnung Freistrahlanlage 12

1. Berechnung der Austrittsgeschwindigkeit aus der Freistrahlanlage

(Impulstrombilanz zwischen 1 und 2):

- elektrische Leistung:	$P_{\text{elektr}} := 2000 \cdot W$
- elektr.-hydraul. Wirkungsgrad:	$\eta := 0.7$
- hydraulische Leistung:	$P_{\text{hydraul}} := P_{\text{elektr}} \cdot \eta$
	$P_{\text{hydraul}} = (1.4 \cdot 10^3) W$
- Temperatur des Oberflächenwassers in °C:	$T_{\text{wW0}} := 20 \quad T_{\text{kW0}} := 20$
- Dichte des Oberflächenwassers:	$\rho_{\text{wW0}} := 999.972 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 0.007 \cdot (T_{\text{wW0}} - 4)^2 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
	$\rho_{\text{wW0}} = 998.18 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- Temperatur des Wassers, Tiefe 10 m:	$T_{\text{kWz}} := 15$
- Dichte des Wassers, Tiefe 10 m:	$\rho_{\text{kWz}} := 999.972 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 0.007 \cdot (T_{\text{kWz}} - 4)^2 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
	$\rho_{\text{kWz}} = 999.125 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- Leitrohrradius:	$r_2 := 0.7 \cdot m$
- Neigungswinkel der Abströmung von der Anlage (von der Waagerechten):	$\beta_{\text{grad}} := 30 \quad \text{grad}$
	$\beta_{\text{grad}} = 30 \quad \text{grad}$
	$\beta_{\text{rad}} := \frac{\beta_{\text{grad}} \cdot \pi}{180}$
	$\beta_{\text{rad}} = 0.524 \quad \text{rad}$
- Austrittsgeschwindigkeit:	$\beta_{12} := \beta_{\text{rad}}$
	$\rho_{\text{wW2}} := \rho_{\text{wW0}}$
	$c_2 := \sqrt[3]{\frac{P_{\text{hydraul}}}{\rho_{\text{wW2}} \cdot \pi \cdot r_2^2}}$
	$c_2 = 0.969 \frac{m}{s}$
-- x-Komponente der Geschwindigkeit:	$c_{2x} := c_2 \cdot \sin(\beta_{12})$
	$c_{2x} = 0.485 \frac{m}{s}$

-- y-Komponente der Geschwindigkeit: $c_{2y} := c_2 \cdot \cos(\beta_{12})$

$$c_{2y} = 0.84 \frac{m}{s}$$

- Kinetische Konstante der dynamischen Viskosität: $K_1 := 1$

- Dynamische Viskosität des Oberflächenwassers:

$$\eta_{kWO} := \frac{1.795 \cdot 10^{-3} \cdot K_1}{1 + 3.6 \cdot 10^{-2} \cdot T_{kWO} + 1.85 \cdot 10^{-4} \cdot T_{kWO}^2} \cdot Pa \cdot s$$

$$\eta_{kWO} = (1.0006 \cdot 10^{-3}) \frac{kg}{m \cdot s}$$

+

- Tiefenlage des Rohreinlaufes: $y_1 := -1.4 \cdot m$ $l_{1x} := 0 \cdot m$ $x_1 := l_{1x}$ $x_1 = 0 \cdot m$

- Abschnittslänge (Länge des Rohres): $l_R := 1.5 \cdot m$

-- x-Komponente: $l_{2x} := l_R \cdot \sin(\beta_{12})$

$$l_{2x} = 0.75 \cdot m \quad x_2 := l_{2x}$$

-- y-Komponente (Tiefenlage): $y_2 := -l_R \cdot \cos(\beta_{12}) + y_1$

$$y_2 = -2.699 \cdot m$$

- Flankenwinkel des Strömungsgebietes, des Freistrahles, Kegelstumpf: $\alpha := 15 \cdot deg$

2. Berechnung der Bahnkurve des Freistrahles über einzelne Abschnitte der Länge

$l = 1 \cdot m$; Strömungsgebiete I, II, III, IV, ...:

+ Impulsstrombilanz mit Reibung an den Zylinderflanken, mit Schwerkraft und Auftrieb

+ schräge Wirkungsrichtung, $\beta = 30 \text{ grad}$ von der Senkrechten

+ Zylinder als Strömungsgebiet des Freistrahls

+ Kinetische Konstante der dynamischen Viskosität **$K_1 = 1$**

+ Temperatur im Freistrahle und im umgebenden Wasser variabel

- Länge der Abschnitte: $l := 1 \cdot m$

- Winkel der vertikalen Temperaturfunktion:

$$\varepsilon_{grad} := 26.565 \quad \text{grad}$$

$$\varepsilon_{rad} := \frac{\varepsilon_{grad} \cdot \pi}{180}$$

$$\varepsilon_{rad} = 0.464 \quad \text{rad}$$

$$\varepsilon := \varepsilon_{rad}$$

- Temperatur des Wassers in der Tiefe 1 in °C, Rohreintritt:

-- kaltes Wasser:

$$T_{kW2} := T_{wW0} - y_1 \cdot \tan(\varepsilon) \cdot \frac{1}{m}$$

$$T_{kW2} = 20.7$$

- Dichte des Wassers in der Tiefe, Rohreintritt:

-- kaltes Wasser:

$$\rho_{kW1} := \rho_{wW0}$$

$$\rho_{kW1} = 998.18 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

-- warmes Wasser:

$$\rho_{wW1} := \rho_{wW0}$$

$$\rho_{wW1} = 998.18 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

- Temperatur des Wassers in der Tiefe 2 in °C, Rohraustritt:

-- kaltes Wasser:

$$y_2 = -2.699 \text{ m}$$

$$T_{kW2} := T_{wW0} + y_2 \cdot \tan(\varepsilon) \cdot \frac{1}{m}$$

$$T_{kW2} = 18.65$$

-- warmes Wasser:

$$T_{wW1} := T_{wW0}$$

$$T_{wW2} := T_{wW1}$$

$$T_{wW2} = 20$$

- Dichte des Wassers in der Tiefe, Rohraustritt:

-- kaltes Wasser:

$$\rho_{kW2} := 999.972 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 0.007 \cdot (T_{kW2} - 4)^2 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_{kW2} = 998.47 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

-- warmes Wasser:

$$\rho_{wW2} := \rho_{wW0}$$

$$\rho_{wW2} = 998.18 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

- Dynamische Viskosität des kalten Wassers:

$$\eta_{kW2} := \eta_{kW0}$$

- Volumen- und Impulsstrom:

$$V_2 := \pi \cdot r_2^2 \cdot c_2$$

$$V_2 = 1.492 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$I_2 := \rho_{wW1} \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot c_2^2$$

$$I_2 = (1.444 \cdot 10^3) \text{ N}$$

$$\begin{aligned} I_1 &:= I_2 \\ V_1 &:= V_2 \end{aligned}$$

I. Abschnitt:

- Radius nach der Länge l:

$$r_I := \tan(\alpha) \cdot m + r_2$$

$$r_I = 0.968 \text{ m}$$

-- Winkel der Abströmung von der Senkrechten (Variation):

$$\beta_I := 30,32 \dots 34 \quad \text{grad}$$

$$\beta\beta_I(\beta_I) := \frac{\beta_I \cdot \pi}{180}$$

$$\beta\beta_I(\beta_I) = \begin{bmatrix} 0.524 \\ 0.559 \\ 0.593 \end{bmatrix} \quad \text{rad}$$

- Modell, Quadratische Gleichung:

-- Berechnung mit Lösungsformel:

$$p := \frac{2 \cdot r_2 \cdot l}{(r_I - r_2) \cdot r_I^2} \cdot \frac{\eta_{kW2}}{\rho_{wW2}}$$

$$p = (5.59 \cdot 10^{-6}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$xx(\beta_I) := \left(1 - \frac{\rho_{kW2}}{\rho_{wW2}}\right) \cdot \left(\frac{r_2}{r_I}\right)^2 \cdot g \cdot l \cdot \cos(\beta\beta_I(\beta_I)) \quad g = 9.807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$q(\beta_I) := \frac{2 \cdot r_2 \cdot l \cdot c_2}{(r_I - r_2) \cdot r_I^2} \cdot \frac{\eta_{kW2}}{\rho_{wW2}} - \left(\frac{r_2}{r_I}\right)^2 \cdot c_2^2 - xx(\beta_I)$$

$$q(\beta_I) = \begin{bmatrix} -0.4902 \\ -0.4903 \\ -0.4903 \end{bmatrix} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$c_I(\beta_I) := \left(\frac{-p}{2} + \sqrt{\left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q(\beta_I)}\right)$$

$$c_I(\beta_I) = \begin{bmatrix} 0.7002 \\ 0.7002 \\ 0.7002 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- x-Komponente:

$$c_{Ix}(\beta_I) := c_I(\beta_I) \cdot \sin(\beta\beta_I(\beta_I))$$

$$l_{Ix}(\beta_I) := l \cdot \sin(\beta\beta_I(\beta_I))$$

$$c_{Ix}(\beta_I) = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.371 \\ 0.392 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$l_{Ix}(\beta_I) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.53 \\ 0.559 \end{bmatrix} \text{m}$$

-- Verzögerung:
$$a_{I_x}(\beta_I) := \frac{c_{I_x}(\beta_I)^2 - c_{2x}^2}{2 \cdot l_{I_x}(\beta_I)} \quad c_{2x} = 0.485 \frac{m}{s}$$

$$a_{I_x}(\beta_I) = \begin{bmatrix} -0.112 \\ -0.092 \\ -0.073 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} \quad \text{Verzögerung}$$

-- Zeit:
$$t_{I_x}(\beta_I) := \frac{c_{I_x}(\beta_I) - c_{2x}}{a_{I_x}(\beta_I)}$$

$$t_{I_x}(\beta_I) = \begin{bmatrix} 1.20 \\ 1.24 \\ 1.28 \end{bmatrix} s$$

- y-Komponente: nach unten

$$c_{I_y}(\beta_I) := c_I(\beta_I) \cdot \cos(\beta_{\beta_I}(\beta_I))$$

$$l_{I_y}(\beta_I) := l \cdot \cos(\beta_{\beta_I}(\beta_I))$$

$$c_{I_y}(\beta_I) = \begin{bmatrix} 0.606 \\ 0.594 \\ 0.58 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

$$l_{I_y}(\beta_I) = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.848 \\ 0.829 \end{bmatrix} m$$

-- Verzögerung 1:
$$a_{I_{y1}}(\beta_I) := \frac{c_{I_y}(\beta_I)^2 - c_{2y}^2}{2 \cdot l_{I_y}(\beta_I)} \quad c_{2y} = 0.84 \frac{m}{s}$$

$$a_{I_{y1}}(\beta_I) = \begin{bmatrix} -0.195 \\ -0.208 \\ -0.222 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} \quad \text{Verzögerung}$$

-- Verzögerung 2:
$$a_{I_{y2}} := \left(1 - \frac{\rho_{KW2}}{\rho_{W2}} \right) \cdot (-g)$$

$$a_{I_{y2}} = 0.003 \frac{m}{s^2}$$

entgegen der
Erdbeschleunigung
(nach oben)

-- Verzögerung gesamt:

$$a_{I_y}(\beta_I) := a_{I_{y1}}(\beta_I) + a_{I_{y2}}$$

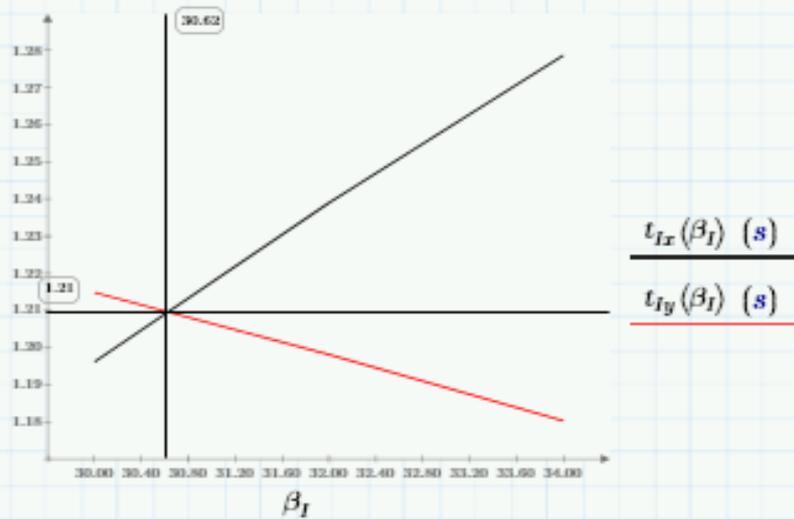
(-) = (<<0) - (>0)

$$a_{I_y}(\beta_I) = \begin{bmatrix} -0.192 \\ -0.205 \\ -0.219 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} \quad \text{Verzögerung}$$

-- Zeit:
$$t_{I_y}(\beta_I) := \frac{c_{I_y}(\beta_I) - c_{2y}}{a_{I_y}(\beta_I)}$$

$$t_{I_y}(\beta_I) = \begin{bmatrix} 1.22 \\ 1.20 \\ 1.18 \end{bmatrix} s$$

- graphische Darstellung der Zeit vom Winkel der Abströmung:



$$\beta_{Igrad} := 30.62 \quad \text{grad} \quad t_I := 1.21 \cdot s$$

$$\beta_{Irad} := \frac{\beta_{Igrad} \cdot \pi}{180}$$

$$\beta_{Irad} = 0.534 \quad \text{rad}$$

- Winkel der Abströmung: $\beta_I = \beta_{Irad}$

- Geschwindigkeit beim Winkel der Abströmung:

$$xx = \left(1 - \frac{\rho_{kW2}}{\rho_{wW2}}\right) \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot g \cdot l \cdot \cos(\beta_I)$$

$$q = \frac{2 \cdot r_2 \cdot l \cdot c_2}{(r_1 - r_2) \cdot r_1^2} \cdot \frac{\eta_{kW2}}{\rho_{wW2}} - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot c_2^2 - xx$$

$$q = -0.49 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$c_I = \left(\frac{-p}{2} + \sqrt{\left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q}\right)$$

$$c_I = 0.70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

-- x-Komponente:

$$c_{Ix} := c_I \cdot \sin(\beta_I)$$

$$l_{Ix} := l \cdot \sin(\beta_I)$$

$$c_{Ix} = 0.357 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$l_{Ix} = 0.509 \text{ m}$$

-- y-Komponente:

$$c_{Iy} := c_I \cdot \cos(\beta_I)$$

$$c_{Iy} = 0.603 \frac{m}{s}$$

$$l_{Iy} := l \cdot \cos(\beta_I)$$

$$l_{Iy} = 0.861 \text{ m}$$

- Tiefenlage für den Auslauf des Abschnittes:

$$y_I := y_2 - l_{Iy}$$

$$y_I = -3.56 \text{ m}$$

- Horizontale Entfernung:

$$x_I := x_2 + l_{Ix}$$

$$x_I = 1.259 \text{ m}$$

- Temperatur des warmen Wassers für den Austritt aus dem Abschnitt in °C:

$$T_{wWI} := \frac{r_2^2 \cdot \rho_{wW2} \cdot T_{wW2} + \frac{1}{3} (r_I^2 + r_I \cdot r_2 - 2 \cdot r_2^2) \cdot \rho_{kW2} \cdot T_{kW2}}{r_2^2 \cdot \rho_{wW2} + \frac{1}{3} (r_I^2 + r_I \cdot r_2 - 2 \cdot r_2^2) \cdot \rho_{kW2}}$$

$$T_{wWI} = 19.593$$

- Temperatur des kalten Wassers für den Austritt aus dem Abschnitt in °C:

$$T_{kWI} := T_{wW0} + y_I \cdot \tan(\varepsilon) \cdot \frac{1}{m}$$

$$T_{kWI} = 18.22$$

- Dichte des warmen Wassers für den Austritt aus dem Abschnittes:

$$\rho_{wWI} := 999.972 \cdot \frac{kg}{m^3} - 0.007 \cdot (T_{wWI} - 4)^2 \cdot \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_{wWI} = 998.27 \frac{kg}{m^3}$$

- Dichte des kalten Wassers für den Austritt aus dem Abschnitt:

$$\rho_{kWI} := 999.972 \cdot \frac{kg}{m^3} - 0.007 \cdot (T_{kWI} - 4)^2 \cdot \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_{kWI} = 998.557 \frac{kg}{m^3}$$

- Dynamische Viskosität des kalten Wassers:

$$\eta_{kWI} := \frac{1.795 \cdot 10^{-3} \cdot K_1}{1 + 3.6 \cdot 10^{-2} \cdot T_{kWI} + 1.85 \cdot 10^{-4} \cdot T_{kWI}^2} \cdot Pa \cdot s$$

$$\eta_{kWI} = (1.0452 \cdot 10^{-3}) \frac{kg}{m \cdot s}$$

- Volumen- und Impulsstrom:

$$V_I := \pi \cdot r_I^2 \cdot c_I$$

$$V_I = 2.061 \frac{m^3}{s}$$

$$I_I := \rho_{wW2} \cdot \pi \cdot r_I^2 \cdot c_I^2$$

$$I_I = (1.44 \cdot 10^3) \text{ N}$$

12.2. Datei: "Modellrechnung Freistrahlanlage 12 30grad-s.mcdx" vom 19.02.2012) S. 45

$$a_{XIx}(\beta_{XI}) = \begin{bmatrix} -0.003 \\ -0.003 \\ -0.004 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} \quad \text{Verzögerung}$$

-- Zeit:
$$t_{XIx}(\beta_{XI}) = \frac{c_{XIx}(\beta_{XI}) - c_{Xx}}{a_{XIx}(\beta_{XI})}$$

$$t_{XIx}(\beta_{XI}) = \begin{bmatrix} 5.37 \\ 5.34 \\ 5.31 \end{bmatrix} s$$

- y-Komponente: nach oben

$$c_{XIy}(\beta_{XI}) = c_{XI}(\beta_{XI}) \cdot \cos(\beta_{\beta_{XI}}(\beta_{XI})) \quad l_{XIy}(\beta_{XI}) = l \cdot \cos(\beta_{\beta_{XI}}(\beta_{XI}))$$

$$c_{XIy}(\beta_{XI}) = \begin{bmatrix} -0.037 \\ -0.043 \\ -0.049 \end{bmatrix} \frac{m}{s} \quad l_{XIy}(\beta_{XI}) = \begin{bmatrix} -0.208 \\ -0.242 \\ -0.276 \end{bmatrix} m \quad (-): \text{ nach oben!}$$

-- Verzögerung 1:
$$a_{XIy1}(\beta_{XI}) = \frac{c_{XIy}(\beta_{XI})^2 - c_{Xy}^2}{2 \cdot \|l_{XIy}(\beta_{XI})\|} \quad c_{Xy} = 0.008 \frac{m}{s}$$

$$a_{XIy1}(\beta_{XI}) = \begin{bmatrix} 0.003 \\ 0.004 \\ 0.004 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} \quad \text{Beschleunigung}$$

-- Verzögerung 2:
$$a_{XIy2} := \left(1 - \frac{\rho_{kWX}}{\rho_{wWX}}\right) \cdot (-g)$$

$$a_{XIy2} = 0.003 \frac{m}{s^2} \quad \text{entgegen der Erdbeschleunigung (nach oben!)}$$

-- Verzögerung gesamt:
$$a_{XIy}(\beta_{XI}) = a_{XIy1}(\beta_{XI}) + a_{XIy2}$$

$$a_{XIy}(\beta_{XI}) = \begin{bmatrix} 0.006 \\ 0.007 \\ 0.007 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} \quad \text{Beschleunigung}$$

-- Zeit:
$$t_{XIy}(\beta_{XI}) = \frac{\|c_{XIy}(\beta_{XI})\| - c_{Xy}}{a_{XIy}(\beta_{XI})} \quad \text{Vorzeichenwechsel!}$$

$$t_{XIy}(\beta_{XI}) = \begin{bmatrix} 4.81 \\ 5.32 \\ 5.75 \end{bmatrix} s$$