Studienort Wilhelmshaven

Institut für Energie- Verfahrens- und Umwelttechnik

Beitrag zur mathematisch-physikalischen Modellierung von Freistrahlanlagen für die Gewässerbelüftung (Teil 2)
- Weiterentwicklung der Freistrahltheorie -

Inhalt:

		Seite
1.	Einleitung	2
2.	Stand der theoretischen Grundlagen zur Freistrahlausbreitung	4
3.	Prinzipien der mathematisch-physikalischen Modellierung	9
4.	Zielstellung	12
5.	Weiterentwicklung des mathematisch-physikalischen Modells	12
6.	Bestimmung der strömungskinetischen Parameter	17
7.	Vorausberechnungen und Maßstabsübertragung	20
8.	Schlussfolgerungen	21
9.	Zusammenfassung	23
10.	Symbolverzeichnis	24
11.	Literatur	25
12.	Anhang	27

Erstellt von: Prof. Dr.-Ing. Bernhard Winter
Jade Hochschule, Studienort Wilhelmshaven
Fachbereich Ingenieurwissenschaften
Institut Energie- Verfahrens- und Umwelttechnik (EVU)

Friedrich-Paffrath-Str. 101
26389 Wilhelmshaven

E-Mail.: bernhard.winter@jade-hs.de
Internet.: http://www.jade-hs.de/?d=8326

1. Einleitung

Die Freistrahltechnik zur Gewässerbelüftung wurde von MICHELE und LÜCKING sowie von ihren Teams innerhalb von ca. 10 Jahren zu einer beachtlichen maschinentechnischen Reife entwickelt, so dass bis einschließlich des Jahres 2012 im Banter See Wilhelmshaven ein fünfjähriger Großversuch durchgeführt werden konnte. Mit zwei propellergetriebenen Freistrahlanlagen sollte sauerstoffreiches Oberflächenwasser bis zum Seegrund transportiert werden, um dort im sauerstoffarmen Wasser der Blaualgenproblematik des Sees wirkungsvoll begegnen zu können.
Der "Abschlussbericht Technik" von LÜCKING aus dem Jahr 2013 /1/ dokumentiert vor allem den Entwicklungsstand der Anlagen und streift die Ergebnisse des Großversuches nur am Rande. Für die erwartete Wirkung der Freistrahlanlagen im Gewässer wurden mehrere Thesen aufgestellt, die durch Versuche bislang noch nicht bewiesen wurden. Parallel zum Großversuch fanden ökologische Begleituntersuchungen von LIEBEZEIT statt, durch die zwar positive Trends bei der Blaualgenproblematik im Gewässer offenkundig wurden, die aber nicht zwangsläufig auf die Wirkung der Freistrahlanlagen zurückzuführen sind, weil eine weitere Anzahl von Faktoren ebenso dafür infrage kommen /1,2/.

Für die Freistrahlausbreitung im Gewässer wurde im Jahr 2002 von MICHELE/MICHELE /3/ ein auf TRUCKENBRODT /4/, bzw. PERRY /5/ zurückzuführendes mathematisches Modell für isotherme Bedingungen verwendet. Dieses Modell gestattet jedoch nur die Berechnung eines linearen Freistrahls, wenn keine vertikalen Temperaturschichtungen im Gewässer vorliegen. Von den Autoren wird die These vertreten, dass der lineare Freistrahl bei einem nichtisothermen Gewässer die Temperaturschichtungen durchbrechen und somit aufheben, also eine vertikale Durchmischung des Sees herstellen kann. Dieses Verhalten soll sogar auch dann auftreten, wenn der Freistrahl mit nur geringer Propellerleistung gebildet wird und sich dessen Ausbreitung dann über mehrere Wochen hinziehen würde. Es wird propagiert, dass bereits eine Freistrahlanlage mit einer Antriebsleistung von ca. **2 kW** in der Lage wäre ein Gewässervolumen von **10 Mio m³** (Banter See Wilhelmshaven) thermisch zu "entschichten". Für solch einen Anwendungsfall des Freistrahls wurde der Begriff des "minimal-invasiven Eingriffs" in das Gewässer geprägt /6/.
Die experimentelle Bestätigung für diese Thesen ist daher eine unverzichtbare wissenschaftliche Forderung.

In einer eigenen mehrjährigen Arbeit zur mathematisch-physikalischen Modellierung der Freistrahlanlagen konnte im Teil 1 dieser Beitragsserie bereits im Jahr 2012 nachgewiesen werden, dass bei nichtisothermen Bedingungen auftriebsbedingte Bahnkurven für den Freistrahl die Folge sind /7/. Diese Bahnkurven, die den Freistrahl wieder zur Wasseroberfläche ablenken können, verhindern das Erreichen des Seegrundes, wenn die Propellerleistung, bzw. der Impulsstrom des Freistrahls zu gering ist. Die Gewässerbelüftung in der Tiefe wäre dann nicht mehr gegeben.

Der Zusammenhang für die mit der Bahnkurve erreichbare Tiefenlage im Gewässer in Abhängigkeit von der Antriebsleistung und anderen Parametern der Freistrahlanlage konnte im genannten Beitrag herausgearbeitet werden.
In einer weiteren Arbeit des Jahres 2012 konnte ferner nachgewiesen werden, dass für den Auf- und Abbau von Temperaturschichtungen im Banter See Wilhelmshaven in den Jahren 2007 - 2011 das Wettergeschehen verantwortlich war /8/. In der warmen Jahreszeit der betrachteten Jahren wechselten sich Perioden hoher Sonneneinstrahlung mit Sturmereignissen ab, was sehr genau dem gemessenen zeitlichen Verhalten der vertikalen Temperaturdifferenzen von der Oberfläche bis zu einer Tiefe von **9 m** zugeordnet werden konnte /2/. Bei intensiver Sonneneinstrahlung bauten sich größere Temperaturdifferenzen bis zu **8 K** auf, die sich während eines Sturms wieder abbauten. Es war sogar feststellbar, dass während eines genügend starken Sturms diese Temperaturdifferenz wieder völlig aufgehoben wurde. Eine Wirkung der Freistrahlanlagen auf die Entschichtung des Gewässers ließ sich dagegen nicht feststellen.

Die schon erwähnte positive Entwicklung bei der Blaualgenproblematik bis zum Jahr 2012 greifen LÜCKING und MICHELE in einer jüngsten Veröffentlichung des Jahres 2015 erneut auf und bringen sie nun allein mit dem Wirken der Freistrahlanlagen in Verbindung /6/. Die Autoren gehen mittlerweile sogar so weit, dass nach Messdaten von MANZENRIEDER aus dem Jahr 2014 zum Banter See /9/ positive Entwicklungen bei der Blaualgenproblematik, allein auf die Freistrahlanlagen zurückzuführen wären, obwohl diese schon ab 2013 zwei Jahre nicht mehr im Einsatz waren. Da keinerlei wissenschaftliche Belege für diese These aufgeführt wurden, muss die Ernsthaftigkeit der Aussagen bezweifelt werden.

Die vorliegende Arbeit soll sich nun theoretisch mit der Frage beschäftigen, ob ein Freistrahl unter isothermen Bedingungen im Gewässer seine lineare Ausdehnung tatsächlich über den gesamten See entfalten kann oder ob er bereits nach einer endlichen Strecke zur Ruhe kommen wird. Die Grundlage dafür ist die Weiterentwicklung der mathematisch-physikalischen Modellierung, um die Freistrahlausbreitung in einem Gewässer nach den physikalisch-realen Gegebenheiten vorausberechnen zu können.
Auch im Zeitalter der CFD-Technik und der numerischen Berechnungsmethoden, z.B. mit Softwarepaketen wie PRO II, ASPEN, Sulcol u.a., spielt diese Modellierung schon allein für Plausibilitätsuntersuchungen von deren Lösungen eine wichtige Rolle.
Nach wie vor gilt, dass analytische Lösungen in Form von exemplarischen Beispielen für die Lehre an Hochschulen aber auch für viele Anwendungsfälle in der Praxis, bei denen ein spezielles physikalisches Verständnis notwendig ist, eine große Bedeutung haben.

Im folgenden soll zunächst der Stand der theoretischen Grundlagen zur Modellierung des Freistrahls bewertet werden, um Schlussfolgerungen für die Aufgabenstellung dieser Arbeit ziehen zu können.

2. Stand der theoretischen Grundlagen zur Freistrahlausbreitung

Folgende Literaturgleichungen /4,5/, die rein empirische Ansätze darstellen, werden von MICHELE/MICHELE /3/ für die Freistrahlausbreitung verwendet:

$$\mathbf{c_{max}(x) = 6{,}57\frac{d_0}{x}c_0} \qquad \text{oder:} \qquad \mathbf{c_{max}(x) = 1{,}41 \cdot Re^{0{,}135}\frac{d_0}{x}c_0} \qquad \mathbf{(1)}$$

Hierin bedeuten **x** die Freistrahllänge, $\mathbf{d_0}$ dessen Anfangsdurchmesser und $\mathbf{c_0}$ die Anfangsgeschwindigkeit bei **x = 0**. Die Größe $\mathbf{c_{max}(x)}$ stellt die axiale Geschwindigkeit im mittleren Stromfaden als Funktion der Freistrahllänge **x** dar, die im Vergleich zu parallelen Stromfäden einen Maximalwert einnimmt. Danach reduziert sich diese Geschwindigkeit in Gl(1) hyperbelartig und wird erst dann Null, wenn **x** gegen unendlich strebt. D.h. der Freistrahl kommt somit erst in der Unendlichkeit zur Ruhe. Das allein widerspricht den Erfahrungen im Ingenieurwesen, wonach es kein Perpetuum mobile, d.h. dass es keine Maschine oder keinen Vorgang geben kann, die oder der bis zur Unendlichkeit läuft (2. Hauptsatz der Thermodynamik).

Die Gl(2) gibt die Funktionsabhängigkeit des Volumenstroms $\mathbf{\mathring{V}(x)}$ im Freistrahl von der Freistrahllänge **x** an. $\mathbf{\mathring{V}_0}$ ist hierbei der Volumenstrom am Anfang bei **x = 0**.
Die Zunahme des Volumenstroms folgt durch die reibungsbedingte Ansaugung von Umgebungswasser über die Freistrahlflanken in den Freistrahl hinein.

$$\mathbf{\dot{V}(x) = 0{,}456\frac{x}{d_0}\dot{V}_0} \qquad \mathbf{(2)}$$

Aus dieser Gleichung wird deutlich, dass der Volumenstrom mit der Freistrahllänge **x** prinzipiell linear zunimmt und mit **x** über alle Maßen, also auch bis zur Unendlichkeit steigen kann. Auch diese Gl(2) widerspricht aus den genannten Gründen allen ingenieurtechnischen Erfahrungen.
Daher stehen diese Gleichungen mit dem Ablauf von realen Vorgängen im Widerspruch und können demzufolge nur als kinematische Gleichungen zur Freistrahlausbreitung für kurze Entfernungen verwendet werden.
Eine weitere Gl(3) beschreibt bei der Länge **x** die radiale Geschwindigkeitsverteilung.

$$\mathbf{c(r) = c_{max}(x) \cdot exp\left(-\ln(2) \cdot \left(\frac{r}{r(x)}\right)^2\right)} \qquad \mathbf{(3)}$$

Diese Gleichung der Geschwindigkeitsverteilung **c(r)** als Funktion vom Radius **r** liefert vom Typ her einen glockenförmigen Verlauf. Weiterhin wird eine Gleichung für den Flankenwinkel **α** des turbulenten Freistrahls angegeben:

$$\alpha = \mathbf{2 \cdot arctan\left(Re_0{}^{-0{,}135}\right)} \qquad \mathbf{(4)}$$

Die REYNOLDS-Zahl wird hier auf den Anfangszustand des Freistrahls an der Stelle **x = 0** bezogen. Der Flankenwinkel **α** wird über die Freistrahllänge als konstant angesehen, was nur als Vereinfachung gelten kann. Realistischer Weise ist eine trompetenartige Strömungsquerschnittsflächenerweiterung mit der Lauflänge des Freistrahles zu erwarten, was auch bei SIGLOCH /10/ im Abschnitt 3.3.5 in einer grafischen Darstellung zum Ausdruck kommt. Allerdings wird beschrieben, dass diese Art der Flächenerweiterung nur bei großer Lauflänge möglich wird, wobei dann von der völligen Auflösung des Freistrahls auszugehen wäre.

Bekanntlich treten bei realen Bewegungsvorgängen eines Fluids Energiedissipationen auf, bei denen ein Teil der Strömungsenergie entwertet wird und sich daraus folgend lokal eine Erhöhung der inneren Energie ergibt. Diese Erhöhung der inneren Energie ist bei Wasserströmungen allerdings meist vernachlässigbar klein.
Ein großer Anteil der Energiedissipation ergibt sich durch die Reibung der Fluidmoleküle untereinander oder an den Wänden und Einbauten. Bei laminarer Wasserströmung gilt das NEWTON'sche Reibungsgesetz /11/. Im Gesetz wird die Proportionalität der Schubspannung zur Schergeschwindigkeit durch die dynamische Viskosität **η** des Fluids ausgedrückt, welche das Reibungsverhalten eines Fluids maßgeblich festlegt.Die dynamische Viskosität wird für das Fluid empirisch bestimmt. Das STOKES'sche Gesetz begründet in einem kreisrunden Rohr auf Grund der Reibung nach dem NEWTON'schen Reibungsgesetz die rotationsparabolische, radiale Geschwindigkeitsverteilung der Strömung /11/. Im STOKES'sche Gesetz wird dem zufolge für eine laminare Strömung die radiale Energiedissipation berücksichtigt.

Bei den technisch wichtigeren turbulenten Strömungen treten allein schon wegen der höheren Fluidgeschwindigkeiten und den Wirbelbewegungen größere Reibungen auf. In der Literatur wird für turbulente Strömungen die turbulente dynamische Viskosität des Fluids $\boldsymbol{\eta_T}$ vorgeschlagen, die sich aus den zwei Anteilen, der laminaren und der turbulenten Viskosität zusammensetzt /10/. Diese dynamische Viskosität $\boldsymbol{\eta_T}$ stellt somit einen strömungskinetischen Parameter für die turbulente Strömung dar und wird ebenfalls empirisch bestimmt.

Bei der Erweiterung des HAGEN-POISEUILLE'schen Gesetzes zur Berechnung des Druckverlustes in Rohrströmungen wird bei den gleichen Bedingungen einer laminaren Strömung für die axiale Reibung die dimensionslose Rohrreibungszahl λ eingeführt /11/. In dieser dimensionslosen Rohrreibungszahl λ ist die dynamische Viskosität **η** des Fluids über die REYNOLDS-Zahl enthalten und sie erfüllt für die axiale Reibung ebenfalls die Bedingung eines strömungskinetischen Parameters. Für die laminare Rohrströmung berechnet sich die Rohrreibungszahl über die REYNOLDS-Zahl und für turbulente Strömungen wird λ empirisch bestimmt.

Die in /7/ verwendeten eigenen Modellierungsgrundlagen gelten zwar für den allgemeinen Fall der nichtisothermen Bedingungen im Gewässer, aber da die axiale Energiedissipation nicht berücksichtigt wurde, sind diese nicht für den realen Freistrahl anzuwenden. Im folgenden sollen die Modellgleichungen und einige Ergebnisse kurz zusammengefasst werden. Diese theoretischen Ergebnisse beziehen auf den Großversuch der Freistrahlanlagen im Banter See Wilhelmshaven /1/.

Die Grundlage zur Berechnung der auftriebsbedingten Bahnkurven ist für das Bilanzgebiet ① → ② die Impulsstrombilanz Gl(5) , Bild 1:

$$\vec{\mathbf{I}}_2 - \vec{\mathbf{I}}_1 = -\vec{\mathbf{F}}_{\tau,12} + \vec{\mathbf{F}}_{G,12} - \vec{\mathbf{F}}_{A,12} \qquad \textbf{(5)}$$

Hierin bedeuten $\vec{\mathbf{F}}_{\tau,12}$ die Reibungskraft mit der über den Mantel des Freistrahls Umgebungswasser angesaugt wird sowie $\vec{\mathbf{F}}_{G,12}$ und $\vec{\mathbf{F}}_{A,12}$ die Schwer- und die Auftriebskraft, die auf den Freistrahl wirken. Weiterhin bedeuten $\vec{\mathbf{I}}_1$ und $\vec{\mathbf{I}}_2$ die Ein- und Austrittsimpulsströme.

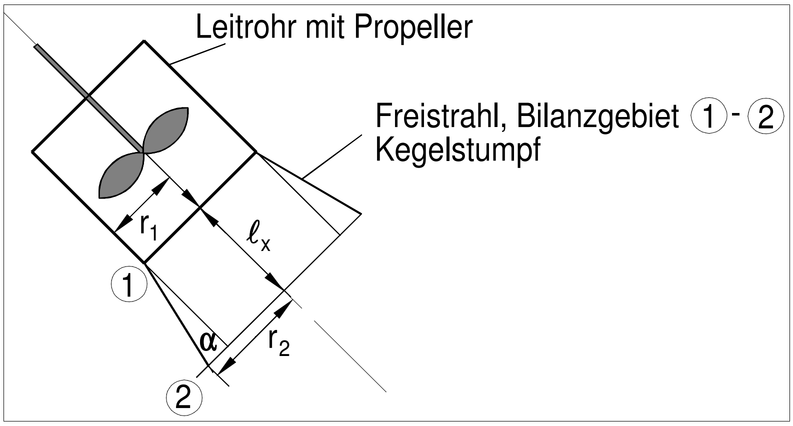


Bild 1 Bilanzgebiet ① → ② des Freistrahls

In die Gl(5) werden die Gln(6) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
&\text{Impulsstrom Eintritt, } \mathbf{1}: && \vec{\mathbf{I}}_1 = \dot{\mathbf{m}}_1\, \vec{\mathbf{c}}_1 = \rho_{wW,1}\, \dot{\mathbf{V}}_1\, \vec{\mathbf{c}}_1 \\
&\text{Impulsstrom Austritt, } \mathbf{2}: && \vec{\mathbf{I}}_2 = \dot{\mathbf{m}}_2\, \vec{\mathbf{c}}_2 = \rho_{wW,2}\, \dot{\mathbf{V}}_2\, \vec{\mathbf{c}}_2 \\
&\text{Reibungskraft, Mantel:} && \vec{\mathbf{F}}_{\tau,12} = \mathbf{A}_{M,12}\, \vec{\tau}_{12} \\
&\text{mit:} && \vec{\tau}_{12} = \eta_{WT}\, \frac{\mathbf{dc}}{\mathbf{dy}} \qquad \textbf{(6)} \\
&\text{mit:} && \eta_{WT} = \eta_W\, \mathbf{K}_1 \\
&\text{Schwerkraft (senkrecht):} && \vec{\mathbf{F}}_{G,12} = \rho_{wW,12}\, \mathbf{V}_{12}\, \vec{\mathbf{g}} \\
&\text{Auftriebskraft (senkrecht):} && \vec{\mathbf{F}}_{A,12} = \rho_{kW,12}\, \mathbf{V}_{12}\, \vec{\mathbf{g}}
\end{aligned}$$

Die Schwerkraft für den Freistrahl in Gl(6) wird durch das Wasser höherer Temperatur mit der kleineren Dichte $\boldsymbol{\rho_{wW}}$ (warmes Wasser) und die Auftriebskraft durch das Umgebungswasser tieferer Temperatur mit der höheren Dichte $\boldsymbol{\rho_{kW}}$ (kaltes Wasser) definiert.
Ferner bedeutet in Gl(6) $\mathbf{K_1} \geq \mathbf{1}$ Einfachheit halber einen Proportionalitätsfaktor als strömungskinetischen Parameter für die Reibung an den Flanken des Strömungsgebietes. Die Verwendung der turbulenten dynamischen Viskosität $\boldsymbol{\eta_{WT}}$ des Wassers gibt eine sehr einfache Möglichkeit der Einbeziehung der höheren Reibung beim turbulenten Freistrahl (siehe oben).

Die Lösung der Vektorengleichungen Gl(5) und (6) wurde abschnittsweise mit der Software PTC-MathCad Prime 3.0 vorgenommen und es wurde für nichtisotherme Bedingungen die Funktion **12** und für isotherme Bedingungen die Funktion **13** im Gewässer erhalten. Die elektrische Leistung für den Propellerantrieb ist jeweils mit **2 kW** angenommen worden, Bild 2.

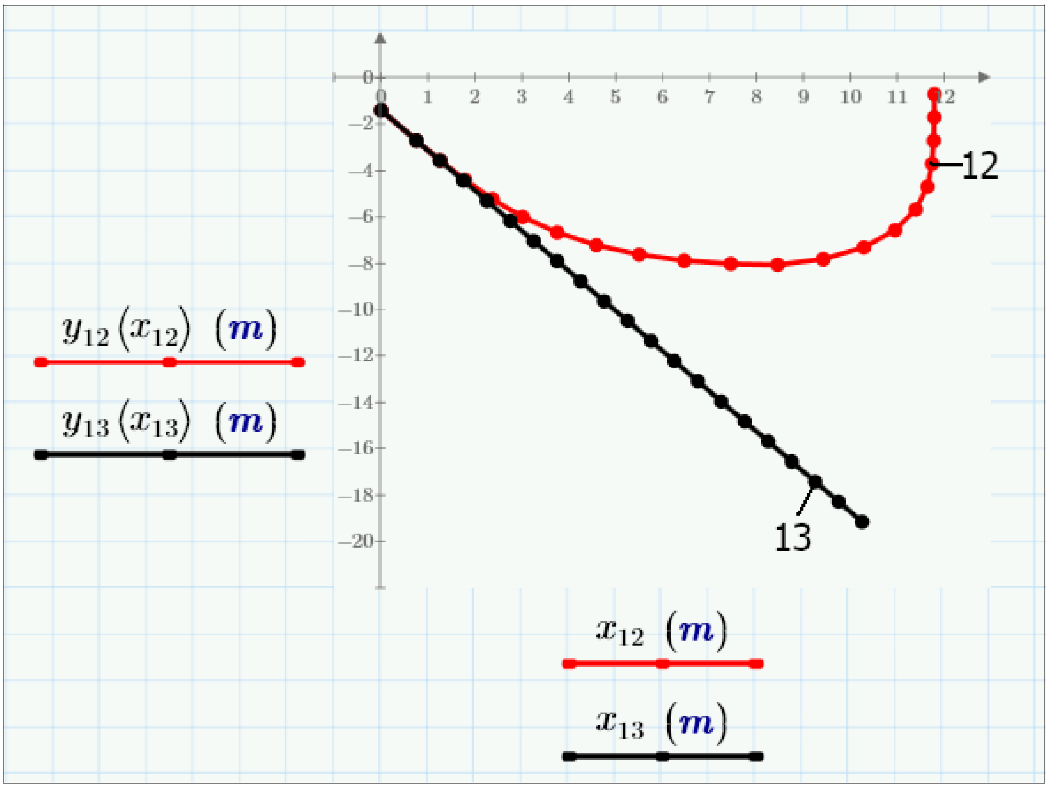


Bild 2 Berechneter Freistrahlverlauf in einem Gewässer
Bahnkurve **12,** nichtisotherm,
linearer Verlauf **13**, isotherm,
$\mathbf{K_1 = 1}$; ohne Berücksichtigung der axialen Energiedissipation

Aus Bild 2 kann entnommen werden, dass mit einem Freistrahl nur bei isothermen Bedingungen größere Tiefenlagen eines Gewässers erreicht werden können, während bei nichtisothermen Bedingungen die Bahnkurve sowohl eine vertikale als auch eine horizontale Ausdehnung des Freistrahls begrenzt. Die Bahnkurve **12** lässt den Schluss zu, dass mit dem Freistrahl bei nichtisothermen Bedingungen nicht in jedem Fall das gesamte Gewässer und der Gewässergrund erreicht werden kann.
Im Bild 3 werden die prinzipiellen Bahnkurven bei vergrößerter turbulenter dynamischer Viskosität $\boldsymbol{\eta_{WT}}$ der turbulenten Freistrahlströmung dargestellt, wenn $\mathbf{K_1}$ **= 1000**, bzw. $\mathbf{K_1}$ **= 5000** beträgt. Es ist zu erkennen, dass die dabei auftretenden engeren Bahnkurven **12-1**, bzw. **12-2** im Vergleich zur Kurve **12** die Freistrahlausbreitung weiter einschränken. Diese erhaltenen Bahnkurven begründen sich darin, dass bei einer größerer Fluidreibung mehr Umgebungswasser über den Mantel des Freistrahles angesaugt wird und sich dadurch die Freistrahlgeschwindigkeit mehr reduziert.

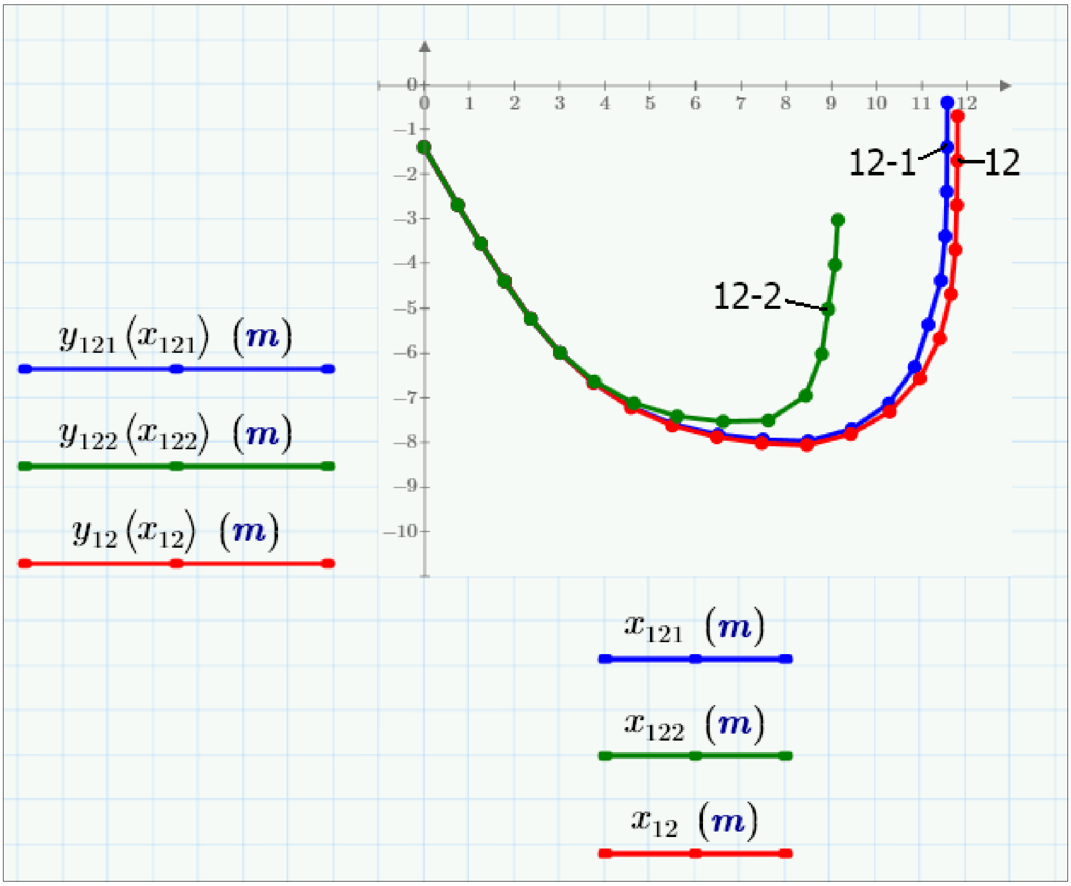


Bild 3 Berechnete Bahnkurven bei verschiedenen strömungskinetischen Konstanten $\mathbf{K_1}$:
Bahnkurve 12-1: $\mathbf{K_1}$ **= 1000**
Bahnkurve 12-2: $\mathbf{K_1}$ **= 5000**
Bahnkurve 12: $\mathbf{K_1}$ **= 1** zum Vergleich siehe Bild 2

Da bei diesen Berechnungen die axiale Energiedissipation nicht berücksichtigt wurde, würde bei deren Einbeziehung die Freistrahlausbreitung noch geringer ausfallen.

Das Ziel dieser Arbeit Teil 2 soll daher sein, die axiale Energiedissipation bei der mathematisch-physikalischen Modellierung von Freistrahlanlagen mit einzubeziehen, um eine realistische Freistrahlausbreitung vorausberechnen zu können. Wegen der besseren Darstellung der Ergebnisse im Vergleich zu den Ergebnissen ohne Dissipation wird in dieser Arbeit der einfachere Fall der isothermen Bedingungen im Gewässer angenommen.

3. Prinzipien der mathematisch-physikalischen Modellierung

Im Allgemeinen werden in der Verfahrenstechnik zur Modellbildung Dichteströme der drei Erhaltungsgrößen

- Masse (Komponentenmasse, Stoff), [kg/(m³ s)]
- Enthalpie/Wärme [W/m³] und
- Impuls [N/m³]

in Form von Transportbilanzen über ein Bilanzgebiet verwendet, die als partielle Differentialgleichungen prinzipiell aus folgenden Termen bestehen:

Zeit	Konvektion	Konduktion	Quelle/ Senke

Tab. 1 Terme in den Transportbilanzen in der Verfahrenstechnik

Der Zeitterm in Tab. 1 bedeutet im Bilanzgebiet die zeitliche Änderung der Erhaltungsgröße, der Konvektionsterm das konvektive Ein- und Ausströmen bedingt durch einen Stoffstrom, der Konduktionsterm den Ein- und Austransport mittels Leitung und der Quellen-/Senkenterm die Entstehung/Reduktion bei einer Umwandlung.
Ein Übergangsterm zur Beschreibung des Übergangs der Erhaltungsgröße über eine Grenzschicht zu einer Phasengrenzfläche entwickelt sich üblicherweise aus dem Konduktionsterm mit den Randbedingungen an der Phasengrenze. Dieser Term ist für die vorliegende Arbeit bedeutungslos und wird deshalb in Tab. 1 nicht aufgeführt.
Die mathematischen Formulierungen dieser Transportbilanzgleichungen können der Literatur /12/ entnommen werden. Bei deren Anwendung, d.h. bei deren Lösung können zur Vereinfachung meist einzelne Terme wegfallen, Tab. 2.

Bedingung / Term	stationär	makros-kopische Ruhe	ideale Durch-mischung	Pfropfen-strömung	quellenfrei/ senkenfrei
Zeit	entfällt				
Konvektion		entfällt			
Konduktion			entfällt	entfällt	
Quelle/Senke					entfällt

Tab. 2 Vereinfachungen in den Transportbilanzen der Verfahrenstechnik

Wenn die Transportbilanzen entsprechend der Terme von Tab. 1 in die Erhaltungssätze für die Masse, die Energie und den Impuls überführt werden sollen, dann sind diese zu modifizieren. In der Strömungstechnik existieren eine Reihe wichtiger Grundgleichungen für Rohrströmungen, die auf den Transportbilanzen aufbauen und die z.T. auch zu den Erhaltungssätzen führen.

Art der Transportbilanz: verwendete Terme Tab. 1	Strömungstechnische Grund-gleichung und **Erhaltungssatz**
Massenstromdichtebilanz: Konvektion	Kontinuitätsgleichung, **Massenstrom-erhaltungssatz**
Impulsstromdichteblanz: Konvektion, Quelle/Senke	BERNOULLI-Gleichung, **Strömungs-energieerhaltungssatz** ohne Druck-verlustenergieterm
Impulsstromdichtebilanz: Konvektion, Konduktion, Quelle/Senke	BERNOULLI-Gleichung, EULER’sche-Bewegungsgleichung**, Strömungs-energieerhaltungssatz** mit Druck-verlustenergieterm
Impulsstromdichtebilanz: Konvektion, Quelle/Senke	**Impulsstromerhaltungssatz**
Impulsstromdichtebilanz: Konduktion, Quelle/Senke	STOKES-Gesetz (Stromfadentheorie)
Impulsstromdichtebilanz: Konvektion, Konduktion, Quelle/Senke	HAGEN-POISEUILLE-Gesetz

Tab. 3 Grundgleichungen der Strömungstechnik und deren Ursprung

In Tab. 3 sind die Art der Transportbilanzen und die dabei verwendeten Terme (vergl. Tab. 2) sowie auch die daraus herleitbaren strömungstechnischen Grundgleichung und Erhaltungssätze zusammengestellt worden.
Die Grundgleichungen in Tab. 3 werden auch dann erhalten, wenn von der bekannten NAVIER-STOKES-Gleichung sowie von der EULER'schen Bewegungsgleichung für Strömungen ausgegangen wird /13/.

In der Strömungstechnik spielt die Enthalpie-/Wärmebilanz nur dann eine Rolle, wenn nichtisotherme Bedingungen vorliegen. In der vorliegenden Arbeit wird daher diese Bilanz vernachlässigt. Anstelle der Enthalpie-/Wärmebilanz ist aber die Energiegleichung für die Bewegung des Fluids, also die Strömungsenergiebilanz von großer Bedeutung, die als BERNOULLI-Gleichung in der Tab. 3 mit oder auch ohne Druckverlustenergieterm schon erwähnt wurde.
An dieser Stelle sei darauf verwiesen, dass sich die BERNOULLI-Gleichung mit Druckverlustenergieterm konform zum 1. Hauptsatz der Thermodynamik für offene irreversible Systeme verhält /14/. Dadurch wird deutlich, dass sich der Druckverlustenergieterm in der BERNOULLI-Gleichung durch den Term der Energiedissipation im 1. Hauptsatz begründet, was für die Betrachtungen in dieser Arbeit von größter Bedeutung ist.

Bei den in Tab. 3 aufgeführten strömungstechnischen Grundgleichungen ergibt sich nur aus dem Konduktionsterm der Impulsstromdichtebilanz als Leitkoeffizient ein strömungskinetischer Parameter und zwar die dynamische Viskosität des Fluids $\boldsymbol{\eta}$. Dieser Leitkoeffizient stellt, wie schon erwähnt, für eine laminare Strömung einen Stoffwert des Fluids dar, der die Proportionalität der Schubspannung und der Schergeschwindigkeit ausdrückt. Die dynamische Viskosität $\boldsymbol{\eta}$ beschreibt somit das Reibungsverhalten eines Fluids, d.h. die Energiedissipation in einer laminaren Strömung.
Die vergleichbaren Leitkoeffizienten der Massenstromdichtebilanz und der Enthalpie-/Wärmestromdichtebilanz sind der Diffusionskoeffizient und die Wärmeleitfähigkeit, die für diese Arbeit keine Rolle spielen.

Kinetische Parameter im Allgemein, bzw. strömungskinetische Koeffizienten im Speziellen können wie schon erwähnt nur experimentell ermittelt werden. Üblicherweise erfolgen solche Messungen im Labormaßstab und die Ergebnisse werden dann für die Anwendungsfälle in den technischen Maßstab übertragen. Für diese Maßstabsübertragung sind allerdings die verfahrenstechnischen Regeln einzuhalten.
Die beiden wichtigsten Regel sind, dass die geometrische Ähnlichkeit zwischen Modell und Hauptausführung (technischer Ausführung) einzuhalten ist und dass bei den Prozessen in den verschiedenen Maßstäben keine Mechanismusänderungen auftreten dürfen /15/.

4. Zielstellung

Wie schon erwähnt, tritt bei der axialen Bewegung von Fluiden eine Energiedissipation auf, bei der ein Teil der Strömungsenergie des Fluids entwertet wird. Für die Ausbreitung eines Freistrahls bedeutet das realistischerweise, dass der Freistrahl bereits nach einer endlichen Zeit oder nach einer endlichen Strecke zur Ruhe kommt und nicht erst bei unendlich, wie im Abschnitt 2. dargelegt wurde.
Die Energiedissipation für eine Strömung kann bei der mathematisch-physikalischen Modellierung prinzipiell nur in der Strömungsenergiebilanz berücksichtigt werden.
Somit ergibt sich in dieser Arbeit für die Herleitung eines neuartigen erweiterten Freistrahlmodells, welches die Ausbreitung des realen Freistrahls in einem Gewässer beschreibt, folgende Forderung:
Simultane Lösung der Bilanzgleichungen für die
- Strömungsenergie unter Einbeziehung der Energiedissipation, den
- Impulsstrom, und den
- Massenstrom

im Sinne der jeweiligen Erhaltungsätze.

Zur Vereinfachung sollen isotherme Verhältnisse im Gewässer angenommen werden, so dass die Enthalpie-/Wärmebilanz entfällt.
Die Anwendung des weiterentwickelten Freistrahlmodells soll im Rahmen der Maßstabsübertragung dahingehend vorgenommen werden, dass im Labormaßstab die strömungskinetischen Parameter gemessen werden um daraus folgend im Rahmen der Maßstabsübertragung Vorausberechnungen zur Freistrahlausbreitung in einem Gewässer vornehmen zu können.

5. Weiterentwicklung des mathematisch-physikalischen Modells

Die Herleitung eines neuartigen erweiterten mathematisch-physikalischen Modells für die Freistrahlausbreitung in einem Gewässer bei Einbeziehung der Energiedissipation basiert auf den Erhaltungssätzen der Strömungsenergie, des Impulsstromes sowie des Massenstroms für das Bilanzgebiet ① → ② des Freistrahls (vergl. Bild 1).
Wegen der gewählten isothermen Bedingungen im Gewässer ergeben sich für die Bilanzen Vereinfachungen. Die wichtigste ist die, dass für die Freistrahlausbreitung keine vektorielle Eigenschaft des Freistrahles durch den Auftrieb und die Schwerkraft berücksichtigt werden muss. Daher erfolgt die Bilanzierung nur eindimensional entlang der x-Achse.

◦ Strömungsenergiebilanz (spezifische Energie), **J/kg**:
Die Strömungsenergiebilanz von reibungsbehafteten, inkompressiblen Systemen beschränkt sich bei Rohrströmungen im Allgemeinen auf Terme für die kinetische sowie die potentielle Energie der Lage und des Druckes als auch auf die Druckverlustenergie (BERNOULLI-Gleichung mit Druckverlustenergieterm). Dieser Druckverlustenergieterm wird im folgenden als Dissipationsenergieterm $\mathbf{e}_{\mathbf{Diss,12}}$ bezeichnet.

Bei freien isothermen Strömungen wie z.B. beim Freistrahl in einem Gewässer ohne Temperaturschichtung können die Terme der potentiellen Energie der Lage und des Druckes vernachlässigt werden. Dadurch reduziert sich die spezifische Strömungsenergiegleichung für einen Freistrahl im Bilanzgebiet ① → ② nur auf die Terme der kinetischen und der Dissipationsenergie Gl(7), (vergl. Bild 1).

$$\frac{c_1^2}{2} = \frac{c_2^2}{2} + e_{Diss,12} \tag{7}$$

Die Gl(7) verdeutlicht, dass sich allein durch das Auftreten der Dissipationsenergie die Geschwindigkeit des Freistrahls reduzieren muss, unabhängig davon, ob eine Querschnittserweiterung eine Geschwindigkeitsreduktion erzwingen würde (Kontinuitätsgleichung).

Diese Betrachtungsweise ist konform zum 2. Hauptsatz der Thermodynamik. Bekanntlich begründet der 2. Hauptsatz die Entwertung von Energie durch Dissipation über eine Entropieerhöhung im System. Diese Dissipation, bzw. diese Entropieerhöhung resultiert beim Freistrahl sowohl aus der inneren Reibung der sich bewegenden Wassermolekülen untereinander, als auch aus dem Mischungsvorgang des Freistrahlwassers mit dem angesaugten Umgebungswasser.

Für die Energiedissipation eines Freistrahls im Gewässer werden in der Literatur analog zur erweiterten HAGEN-POISEUILLE'schen Gleichung für Rohrströmungen /11/ keine vergleichbaren Beziehungen angegeben, so dass wegen ihrer Einfachheit diese Gleichung auch für eine Freistrahlströmung auf das Bilanzgebiet ① → ② angewendet wird:

$$e_{Diss,12} = \frac{\bar{c}^2}{2}\, \lambda_{Diss}\, \frac{\ell_x}{\bar{d}} \tag{8}$$

Hierin bedeuten λ_{Diss} ein dimensionsloser Reibungsbeiwert, $\bar{c}$ die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Freistrahls, $\bar{d}$ der mittlere Strömungsquerschnitts-durchmesser und ℓ_x die Strömungslänge im Bilanzgebiet ① → ②.

Dieser dimensionslose Reibungsbeiwert λ_{Diss} kann die durch die innere Reibung der Wassermoleküle bedingte axiale Energiedissipation der freien Strömung im Bilanzgebiet ① → ② empirisch gut erfassen. Weiterhin werden in Gl(8) die Mittelwerte über die Gln(9) ausgedrückt:

$$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2}{2} \qquad \bar{d} = \frac{d_1 + d_2}{2} \qquad d_1 = 2\,r_1 \qquad d_2 = 2\,r_2 \tag{9}$$

Aus den Gln(7) - (9) wird für die Geschwindigkeit des aus dem Bilanzgebiet ① → ② austretenden Wasserstroms c_2 die quadratische Gleichung Gl(10) erhalten.

$$c_2^2 + c_2 \frac{2\,\ell_x\,\lambda_{Diss}}{4\,(r_1 + r_2) + \ell_x\,\lambda_{Diss}} c_1 + \left(\frac{\ell_x\,\lambda_{Diss} - 4\,(r_1 + r_2)}{4\,(r_1 + r_2) + \ell_x\,\lambda_{Diss}} \right) c_1^2 = 0 \qquad \textbf{(10)}$$

In Gl(10) ist als strömungskinetischer Parameter der dimensionsloser Reibungsbeiwert λ_{Diss} enthalten.

◦ Impulsstrombilanz, **N**:
Bei der Annahme von isothermen Bedingungen im Gewässer reduziert sich die vektorielle Impulsstrombilanz Gl(5) auf eine Skalarengleichung, ohne die Terme der Schwer- und der Auftriebskräfte berücksichtigen zu müssen, Gl(11). Ein Term für die innere Reibung existiert in einer Impulsbilanz nicht, jedoch einer für die Reibungskraft am Mantel des Freistrahls, der die Wasseransaugung begründet.

$$\dot{I}_2 - \dot{I}_1 = -F_{\tau,12} \qquad \textbf{(11)}$$

Hierin bedeuten (vergl. Gl(6) und /7/):

$$\begin{aligned} &\text{Impulsstrom, Eintritt } \mathbf{1}: && \dot{I}_1 = \rho_W\ \pi\ r_1^2\ c_1^2 \\ &\text{Impulsstrom, Austritt } \mathbf{2}: && \dot{I}_2 = \rho_W\ \pi\ r_2^2\ c_2^2 \\ &\text{Reibungskraft, Mantel}: && \vec{F}_{\tau,12} = 2\ \pi\ r_1\ \ell_x\ \frac{c_1 + c_2}{r_2 - r_1} \cdot \eta_{WT} \end{aligned} \qquad \textbf{(12)}$$

Es folgt für die Geschwindigkeit des aus dem Bilanzgebiet ① → ② austretenden Wasserstroms des Freistrahls c_2 ebenfalls eine quadratische Gleichung Gl(13).

$$c_2^2 + \frac{2\,r_1\,\ell_x\,\eta_{WT}}{(r_2 - r_1)\,\rho_W\,r_2^2} c_2 + \frac{2\,r_1\,\ell_x\,\eta_{WT}}{(r_2 - r_1)\,\rho_W\,r_2^2} c_1 + \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \right) c_1^2 = 0 \qquad \textbf{(13)}$$

In der Gl(13) ist als strömungskinetischer Parameter η_{WT} enthalten, da der Freistrahl als turbulent erwartet wird.

◦ Massenstrombilanz, **kg/s**:
In der Massenstrombilanz muss neben der Wasserein- und -ausströmung an den Bilanzgrenzen ① und ② berücksichtigt werden, dass über die Freistrahlmantelfläche ständig Umgebungswasser angesaugt wird. Vereinfachend wurde in /7/ angenommen und auch für diese Arbeit vorausgesetzt, dass der Kegelstumpf des Freistrahls im Bilanzgebiet ① → ② (vergl. Bild 1) aus einem Zylinder und dem konischen Mantel besteht. Das Zylindervolumen soll dabei das Freistrahlwasser und das Volumen des konischen Mantels das angesaugte Umgebungswasser repräsentieren.

Diese Volumina werden für das Bilanzgebiet ① → ② mit der Gl(14) ausgedrückt.

Zylinder	Kegelstumpfmantel	
$\mathbf{V} = \pi \mathbf{r}_1^2\, \ell_x$	$\mathbf{V} = \frac{\ell_x\, \pi}{3}\left(\mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_2\, \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1^2\right) - \pi \mathbf{r}_1^2\, \ell_x$	**(14)**

Hierin bedeutet ℓ_x die Länge (Höhe) des Zylinders, bzw. des Kegelstumpfes, Bild 1. Für die über die Bilanzgrenzen ① und ② ein- und ausströmenden Volumenströme $\mathbf{\dot{V}}_1$, $\mathbf{\dot{V}}_2$ und der über den Mantel angesaugte Volumenstrom $\mathbf{\Delta\dot{V}}$ gilt die Gl(15):

$$\dot{\mathbf{V}}_2 = \dot{\mathbf{V}}_1 + \Delta\dot{\mathbf{V}} \qquad \textbf{(15)}$$

In Gl(15) bedeutet $\mathbf{\Delta\dot{V}}$ der über den Mantel eingesogene Volumenstrom des Umgebungswassers. Aus den Gln(14) und (15) folgt:

$$\pi \mathbf{r}_2^2\, \mathbf{c}_2 = \pi \mathbf{r}_1^2\, \mathbf{c}_1 + \frac{\ell_x}{\mathbf{t}}\frac{\pi}{\mathbf{3}}\left(\mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_2\, \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1^2\right) - \pi \mathbf{r}_1^2\, \frac{\ell_x}{\mathbf{t}} \qquad \textbf{(16)}$$

mit: $\frac{\ell_x}{\mathbf{t}} = \mathbf{c}_1$

Die Umstellung nach der Geschwindigkeit des aus dem Bilanzgebiet ① → ② austretenden Freistrahls $\mathbf{c}_2$ ergibt die Gl(17):

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{c}_1}{\mathbf{3}}\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_2} + \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_2}\right)^2\right) \qquad \textbf{(17)}$$

Der Flankenwinkel des Kegelstumpfes wird mit **α** bezeichnet (siehe Bild 1). Der Radius $\mathbf{r}_2$ für den Austritt der Strömung aus dem Bilanzgebiet ① → ② der Länge ℓ_x ergibt sich mit diesem Flankenwinkel nach folgender Gleichung:

$$\mathbf{tan}\ \alpha = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\ell_x}$$

$$\mathbf{r}_2 = \ell_x\ \mathbf{tan}\ \alpha + \mathbf{r}_1 \qquad \textbf{(18)}$$

Ein konstanter Flankenwinkel **α** für den Freistrahl in seiner gesamten axialen Längsausdehnung steht im Widerspruch zur Aussage in Verbindung mit der Gl(7), wonach sich allein durch das Auftreten der Dissipationsenergie die Geschwindigkeit des Freistrahls reduziert.

Wegen dieser Reduktion der Geschwindigkeit muss sich entsprechend der Kontinuitätsgleichung zwangsläufig der Strömungsquerschnitt vergrößern, unabhängig davon, ob sich durch die Wasseransaugung der Volumenstrom des Freistrahls ebenfalls vergrößert. Wie im Bild 4 dargestellt wird, ergibt sich nun als Schlussfolgerung, dass der reale, isotherme Freistrahl einen mit der Lauflänge ständig vergrößernden Flankenwinkel und damit einen trompetenartigen Freistrahlquerschnitt aufweist.

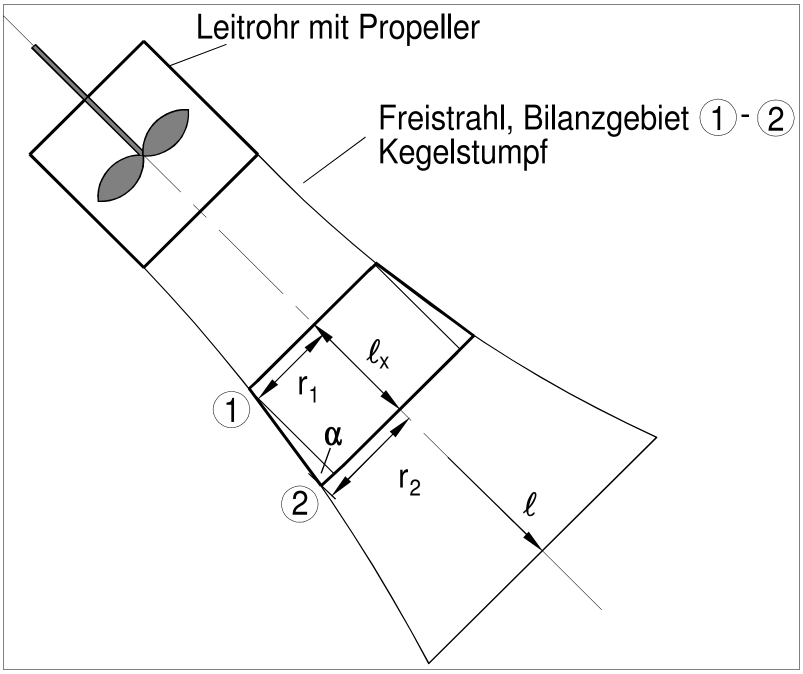


Bild 4 Trompetenartige Freistrahlgeometrie bei Berücksichtigung der Energiedissipation, isotherme Bedingungen

Wird nun das Bilanzgebiet ① → ② im Bild 4 von ℓ_x auf die gesamte Lauflänge des Freistrahls ℓ erweitert, dann kann in Gl(18) der Ausdruck (ℓ_x **tan α**) z.B. mit einem Potenzproduktansatz ($\mathbf{a}\ \ell^{\mathbf{b}}$) ersetzt werden. Es wird Gl(19) erhalten.

$$\mathbf{r_2} = \mathbf{a}\ \ell^{\mathbf{b}} + \mathbf{r_1} \qquad \textbf{(19)}$$

Die Lösung des Gleichungssystems für die drei Bilanzen Gl(10), (13) und (17), in Verbindung mit Gl(19) wurde durch die Kombination eines Gleichsetzungs- und Additionsverfahrens vorgenommen, wobei Gl(20) für die Freistrahlgeschwindigkeit $\mathbf{c_2}$ erhalten wurde.

$$\mathbf{c_2} = \frac{\left(\frac{1}{3}\left(1+\frac{r_1}{a\,\ell^b+r_1}+\left(\frac{r_1}{a\,\ell^b+r_1}\right)^2\right)-\frac{2\,r_1\,\ell\,\eta_{WT}}{a\,\ell^b\left(a\,\ell^b+r_1\right)^2\rho_W}\right)c_1+\left(\frac{\ell\,\lambda_{Diss}-4\left(2\,r_1\,a\,\ell^b\right)}{4\left(2\,r_1\,a\,\ell^b\right)+\ell\,\lambda_{Diss}}+\left(\frac{r_1}{a\,\ell^b+r_1}\right)^2\right)c_1^2}{\left(-\frac{2\,c_1\,\ell\,\lambda_{Diss}}{4\left(2\,r_1\,a\,\ell^b\right)+\ell\,\lambda_{Diss}}+\frac{2\,r_1\,\ell\,\eta_{WT}}{a\,\ell^b\left(a\,\ell^b+r_1\right)^2\rho_W}+1\right)} \qquad \mathbf{(20)}$$

Das mathematisch-physikalische Modell für einen Freistrahl Gl(20) repräsentiert über das gesamte Strömungsgebiet die Funktionsabhängigkeit der Freistrahlgeschwindigkeit von dessen Lauflänge $\mathbf{c_2 = f(\ell)}$.
Die Größen λ_{Diss}, η_{TW}, **a** und **b** stellen dabei die strömungskinetischen Parameter des Freistrahls dar, die experimentell ermittelt werden müssen.
Im Rahmen der Maßstabsübertragung eignet sich diese Gl(20), sowohl zur Vorausberechnung des Freistrahlgeschwindigkeitsverlaufs, wenn die Strömungskinetik bekannt ist als auch umgekehrt zur Berechnung der Strömungskinetik aus der Analyse des Strömungsgeschwindigkeitsverlaufes, was in den folgenden Abschnitten dargestellt werden soll.

6. Bestimmung der strömungskinetischen Parameter

Wie schon im Abschnitt 5. erwähnt wurde, können die in der Gl(20) verwendeten strömungskinetischen Parameter in den Modellgleichungen des Freistrahls λ_{Diss}, η_{TW}, **a** und **b** nur über experimentelle Untersuchungen bestimmt werden.
Diese Untersuchungen wurden von WRONBERG /16/ bereits im Jahr 2013 durchgeführt. Gewählt wurde ein Versuchstand im Labormaßstab, der aus einem Aquarium, einer Pumpe, einer Mündungsdüse für die Ausbildung des Freistrahls, einem Volumenstrommesser, diversen Schlauchverbindungen mit einem T-Stück für die Einspeisung von Tinte zum Anfärben des Freistrahls sowie einer Kamera bestand.
Die Anlagenparameter waren:

- Aquariumvolumen: **130 ℓ**
- Messstrecke für den Freistrahl: **0,5 m** (mit Maßstabsleiste)
- Durchmesser der Mündungsdüse: **1 mm**

Der Volumenstrom des Wassers für den Freistrahl wurde so eingestellt, dass dessen Anfangsgeschwindigkeit beim Austritt aus der Mündungsdüse mit **1 m/s** die gleiche Größenordnung aufwies, wie bei der Freistrahlanlage BANT 1 im Großversuch Banter See Wilhelmshaven /1/.
Zur Vermeidung von Einflüssen der freien Konvektion wurde auf isotherme Bedingungen geachtet und zum Anfärben des Freistrahls eine im Verhältnis **1:15** verdünnte Tinte verwendet. Originale Tinte weist eine deutlich höhere Dichte als die von Wasser auf und diese würde sich daher im Aquarium absetzen und die Ergebnisse verfälschen.

Im Bild 5 ist ein typischer Freistrahl vom Versuch V2-02.07.13 zu sehen /16/. Offensichtlichste Ergebnisse sind, dass sich der Freistrahl scharf vom Umgebungswasser abgrenzt, stark verwirbelt ist und über seine Lauflänge keinen konstanten Flankenwinkel bildet.

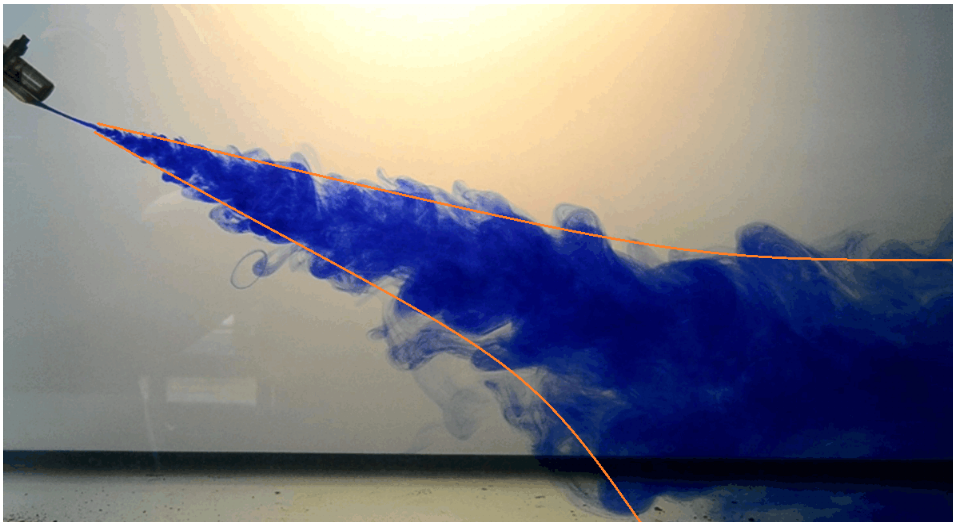


Bild 5 Freistrahl im Laborversuch, Messstrecke **0,5 m**, Versuch V2-02.07.13 /16/

Über Videoaufnahmen konnten Aussagen zur Ausbreitungsgeschwindigkeit des Freistrahls in Abhängigkeit von seiner Lauflänge gewonnen werden. Dazu wurden Videosequenzen in einzelne Bilder zerlegt und für markante Wirbelballen an der Maßstabsleiste der zeitliche Strömungsfortschritt gemessen. Als Ergebnis ergab sich die Funktionsabhängigkeit $\mathbf{c_2 = f(\ell)}$ /16/, die im Bild 6 (siehe MathCad-Datei: Freistrahl-Regression-5-Wronberg-V2-02.07.13.mcdx im Anhang) zu sehen ist.

Für diese Versuchsergebnisse ist nun das mathematisch-physikalische Modell des Freistrahls Gl(20) angewendet worden, um mittels einer nichtlinearen Regression die strömungskinetischen Parameter $\boldsymbol{\lambda_{Diss}}$, $\boldsymbol{\eta_{TW}}$, **a**, **b** als Regressionskonstanten zu bestimmen. Diese Regression erfolgte mit PTC-MathCad Prime 3.1 über die Funktion **genfit(ℓ, c_2, u, F)**, (siehe Anhang). Hierin bedeuten ℓ und $\mathbf{c_2}$ die Variablen der Messwertfunktion, **u** der Startvektor für die Regressionskonstanten sowie **F** der Vektor des mathematisch-physikalischen Modells. Dieser Vektor **F** besteht aus fünf Zeilen. In der ersten Zeile wird die Modellgleichung Gl(20) und in den folgenden Zeilen werden deren partiellen Ableitungen nach den einzelnen Regressionskonstanten eingegeben. Diese partiellen Ableitungen werden ebenfalls über MathCad gebildet.

Da das MathCad-Programm nicht arbeitet, wenn der Freistrahl bei ℓ **= 0** beginnt (Division durch 0), wurde der Startpunkt bei **2 mm** festgelegt. Durch die geeignete Wahl des Startvektors für die Regressionskonstanten gelingt die Berechnung und es wurde folgender Lösungsvektor erhalten:

$$\lambda_{Diss} = 0{,}042$$
$$\eta_{TW} = 3.285 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$$
$$a = 0{,}023$$
$$b = 1{,}216$$

Die erhaltenen Regressionskonstanten stellen für den Freistrahl die Strömungskinetik dar. Es fällt auf, dass zwar η_{TW} um ca. zwei Größenordnungen zu klein ausfällt, aber dass die anderen Konstanten den physikalischen Sachverhalt in der Strömung richtig widerspiegeln. Insbesondere die Werte der Regressionskonstanten im Bereich $\lambda_{Diss} > 0$ und $b > 1$ dokumentieren, dass beim Freistrahl eine axiale Dissipation aufgetreten ist, die eine trompetenartige Strömungsquerschnittsflächenerweiterung verursacht hat. Im Bild 6 ist neben der Messwertfunktion c_2 die für die bestimmten Regressionskonstanten über die Gl(20) zurückgerechnete Funktion $c_{2.1}$ zu sehen (siehe MathCad-Datei: Freistrahl-Regression-5-Wronberg-V2-02.07.13.mcdx im Anhang).

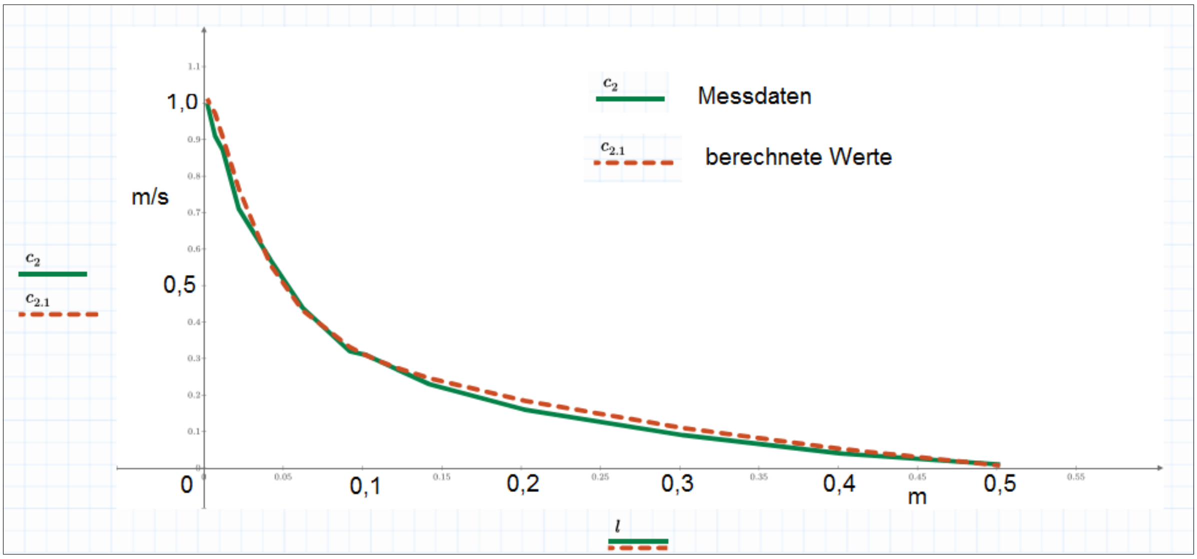


Bild 6 Freistrahlgeschwindigkeiten, Messdaten und berechnete Werte MathCad-Datei: Freistrahl-Regression-5-Wronberg-V2-02.07.13.mcdx im Anhang, Messdaten von /16/

Die gute Übereinstimmung der beiden Geschwindigkeitsfunktionen ist offensichtlich. Somit bildet das mathematisch-physikalische Modell Gl(20) in Verbindung mit den ermittelten Regressionskonstanten die Freistrahlausbreitung unter Laborbedingungen sehr genau ab.

7. Vorausberechnung und Maßstabsübertragung

Vorausberechnungen auf der Basis von Gl(20) mittels MathCad und der bestimmten Strömungskinetik über das vermessene Strömungsgebiet des Versuches hinaus ergaben, dass der Verlauf der Geschwindigkeitskurve $\mathbf{c_{2.2}}$ bei ℓ **= 0,52 m** einen Nulldurchgang aufweist, was bedeutet, dass nach dieser Lauflänge der Freistrahl reibungsbedingt zur Ruhe kommen wird, Bild 7.

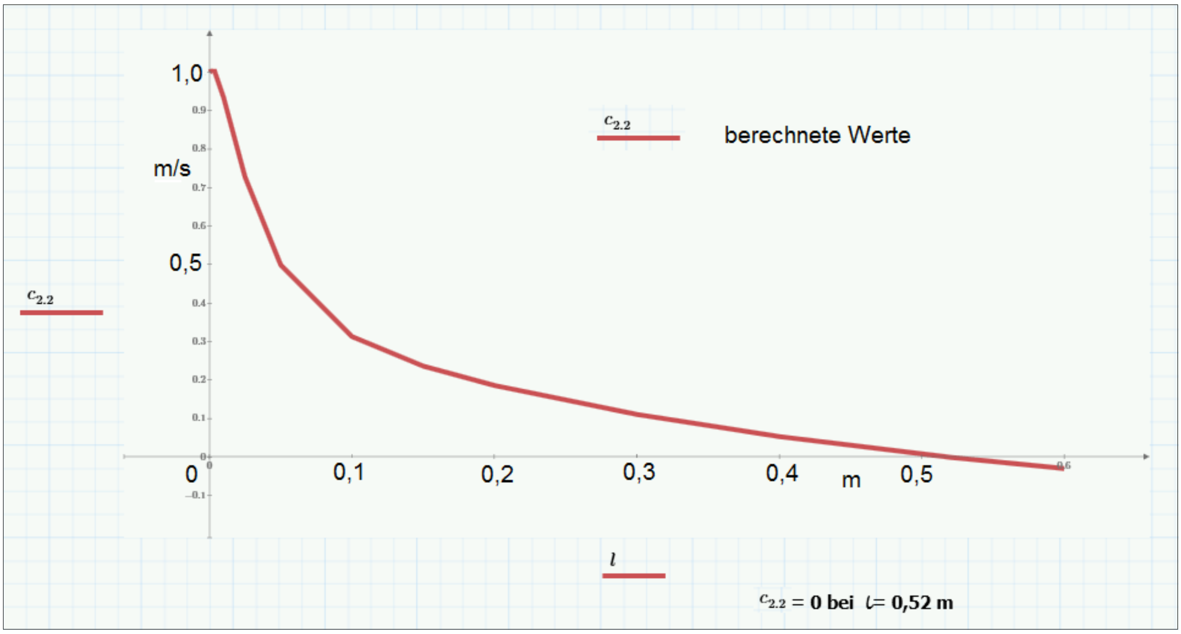


Bild 7 Vorausberechneter Freistrahlgeschwindigkeitsverlauf $\mathbf{c_{2.2} = f(\ell)}$ mit einem Nulldurchgang bei der Strecke ℓ **= 0,52 m**

Diese Lauflänge ist nur geringfügig größer als die Messstrecke von **0,5 m** im Versuch, so dass der Maßstabsfaktor von der Versuchsanlage zum berechneten Fall nahezu **1:1** beträgt.

Weitere Berechnungen zur Maßstabsübertragung mittels MathCad vom Versuchs- auf den technischen Maßstab erfolgten für die Freistrahlanlage BANT 1 des Großversuches im Banter See Wilhelmshaven (siehe MathCad-Ausdruck im Anhang). Für diese Berechnung mit Gl(20) in Verbindung mit der ermittelten Strömungskinetik wurde ebenfalls eine Anfangsgeschwindigkeit des Freistrahl von **1 m/s** zugrunde gelegt und der Radius am Strömungsbeginn entsprechend des Leitrohres der Anlage von **0,7 m** gewählt, Bild 8.

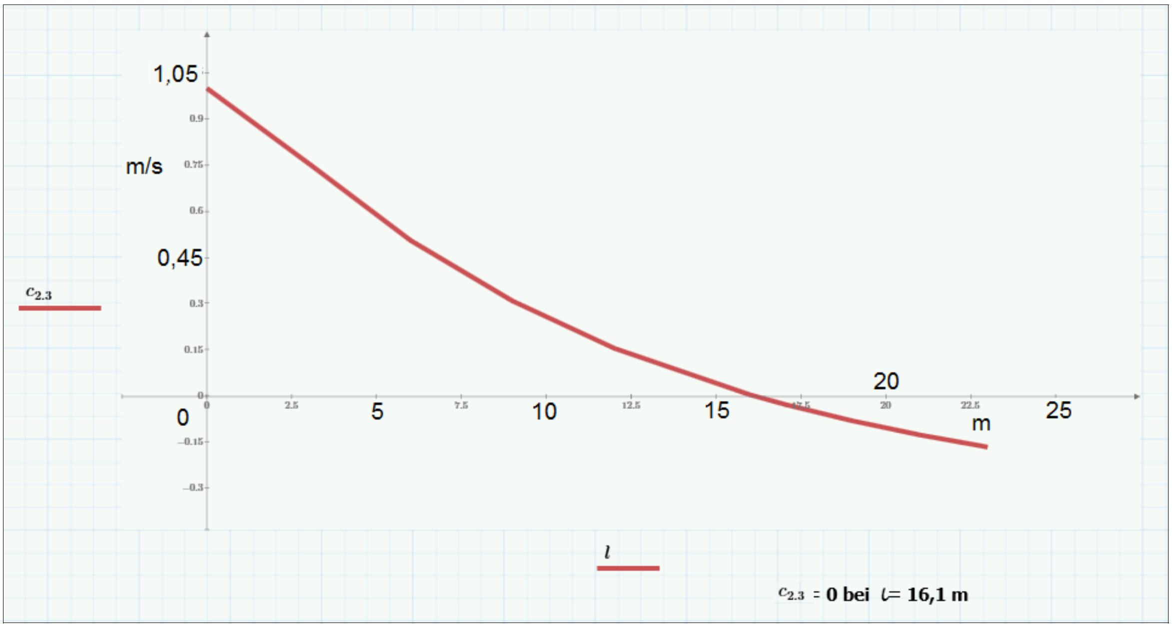


Bild 8 Ergebnis der Maßstabsübertragung auf die Freistrahlanlage BANT 1 Banter See Wilhelmshaven

Diese Darstellung im Bild 8 macht deutlich, dass der Freistrahl reibungsbedingt bereits nach einer Lauflänge von **16,1 m** zur Ruhe kommen wird.
Das erzielte Maßstabsverhältnis der Lauflängen vom Versuchs- zum technischen Fall beträgt dabei **1:16,1/0,52**, d.h. ca. **1:30**.
Dieses Maßstabsverhältnis vom Labor- zum technischen Fall erscheint als sehr klein, was im folgenden Abschnitt weiter ausgeführt wird.

8. Schlussfolgerungen

In der vorliegenden Arbeit ist nachgewiesen worden, dass bei der mathematisch-physikalischen Modellierung von freien Strömungen wie z.B. bei Freistrahlen in einem Gewässer die Vernachlässigung der axialen Dissipation nur sehr grobe Modelle liefern kann. Der in der Literatur beschriebene reibungsfreie axiale Freistrahlverlauf bis unendlich würde allen ingenieurtechnischen Erfahrungen realer Prozesse widersprechen.
Daher ist für eine praxisnahe Modellierung die Berücksichtigung der axialen Dissipation eine wesentliche Forderung. Im Sinne der Erhaltungssätze ist neben der Impulsstrombilanz auch die Strömungsenergiebilanz aufgestellt und darüber hinaus auch noch die Massenstrombilanz mit einbezogen worden.
Letztere erfasste die Strömungsquerschnittserweiterung, wenn durch die Dissipation die Strömungsgeschwindigkeit sinkt.

Das so erhaltene weiterentwickelte mathematisch-physikalische Modell Gl(20) enthält für die Dissipation im Freistrahl in Anlehnung an Rohrströmungen vergleichbare pragmatische strömungstechnische Teilmodelle, die zu den strömungskinetischen Parametern $\boldsymbol{\lambda_{Diss}}$ und $\boldsymbol{\eta_{TW}}$ führen.
Weitere strömungskinetische Parameter sind entsprechend der Gl(19) die Größen **a** und **b**, welche die trompetenartige Querschnittsflächenerweiterung des Strömungsgebietes beschreiben.
Bei der Anwendung der Gl(20) als einheitliches Modell in die zwei entgegengesetzten Anwendungsrichtungen zur

- Bestimmung der Strömungskinetik aus experimentellen Untersuchungen der Freistrahlgeschwindigkeit als Funktion von der Lauflänge $\mathbf{c_2 = f(\ell)}$ als auch umgekehrt die
- Vorausberechnung dieser Funktion $\mathbf{c_2 = f(\ell)}$ auf der Basis der Strömungskinetik,

werden mögliche Fehler minimiert. Die erreichte hohe Genauigkeit kommt im Bild 6 zum Ausdruck, da der im Experiment erhaltene Geschwindigkeitsverlauf $\mathbf{c_2 = f(\ell)}$ mit dem berechneten Verlauf $\mathbf{c_{2..1} = f(\ell)}$ sehr gut übereinstimmt. Somit konnte bewiesen werden, dass die im Modell Gl(20) getroffenen Annahmen und Bedingungen der Versuchspraxis sehr nahe kommen.

Vorausberechnungen zur Freistrahlausbreitung für die Versuchsbedingungen selbst, bzw. zur Maßstabsübertragung auf die Freistrahlanlage BANT 1 im Banter See Wilhelmshaven zeigten, dass die jeweiligen Freistrahle reibungsbedingt nach endlicher Strecke zur Ruhe kommen werden.
Die Genauigkeit der Ergebnisse bei der Vorausberechnung der Freistrahllauflänge für die Versuchsbedingungen selbst, d.h. die Vorausberechnung im Maßstabsverhältnis von ca. **1:1** (siehe Bild 7) ist als sehr hoch einzuschätzen. Die Genauigkeit bei der Maßstabsübertragung vom Versuchs- zum technischen Maßstab der Freistrahlanlagen im Banter See Wilhelmshaven wird erwartungsgemäß deutlich geringer ausfallen. Das erzielte Maßstabsverhältnis dieser Freistrahllauflängen vom Versuchs- zum technischen Fall ergab einen Wert von ca. **1:30**.
Es besteht nun die Frage, wie groß eventuelle Abweichungen bei dieser Maßstabsübertragung möglicherweise ausfallen können. In der Verfahrenstechnik liegen Maßstabsverhältnisse vom Labor- zum technischen Maßstab meist bei **1:100**. Würde dieses Verhältnis auch für die Maßstabsübertragung des Freistrahls zugrunde gelegt werden, dann ergäbe sich für den Freistrahl eine Lauflänge von bis zu **0,52 m x 100 = 52 m**. D.h. der Freistrahl würde erst nach dieser Strecke zur Ruhe kommen. Die Differenz der Lauflängen von den berechneten **16,1** bis maximal **52 m** grenzt den Bereich der Abweichung für die Maßstabsübertragung ein. Diese Überlegung zeigt, dass bei Zulassung einer solch großen Abweichung die Wirkung einer einzelnen Freistrahlanlage im Banter See Wilhelmshaven stets lokal sehr begrenzt bleibt.

Die Anwendung der neu entwickelten Modellierungsgleichung Gl(20) auf nichtisotherme Bedingungen im Gewässer wird in dieser Arbeit nicht fortgesetzt, aber voraussichtlich würden sich engere Bahnkurven als die in den Bildern 2 und 3 ergeben.

9. Zusammenfassung

Im Jahr 2012 wurde bereits zur mathematisch-physikalischen Modellierung von Freistrahlanlagen unter nichtisothermen Bedingungen der Teil 1 dieser Artikelserie veröffentlicht. Es konnte nachgewiesen werden, dass der Freistrahl auftriebsbedingte Bahnkurven durchläuft, so dass die zuverlässige Belüftung des Tiefenwassers mit sauerstoffreichem Oberflächenwasser mittels der propagierten Freistrahltechnik infrage gestellt werden kann.
Der vorliegende Teil 2 stellt eine Fortsetzung zur ersten Arbeit dar, in der die Energiedissipation bei der Freistrahlausbreitung mit berücksichtigt wird. Diese Energiedissipation ist dafür verantwortlich, dass der Freistrahl in seinem Verlauf bereits nach endlicher Lauflänge zur Ruhe kommt.
Die Modellierung des Freistrahls wurde für den einfacheren Fall der isothermen Bedingungen mit der Impulstrom-, die Strömungsenergie- und die Massenstrombilanz simultan vorgenommen. Als strömungskinetische Parameter konnten $\boldsymbol{\lambda_{Diss}}$, $\boldsymbol{\eta_{TW}}$, **a** und **b** erhalten werden.
Das weiterentwickelte mathematisch-physikalische Modell ist gleichermaßen zur Bestimmung der Strömungskinetik als auch zur Maßstabsübertragung geeignet.
Die Messungen wurden im Labormaßstab am mit Tinte eingefärbten Freistrahl unter isothermen Bedingungen durchgeführt. Durch die Tinte konnte das Strömungsgebiet des Freistrahls visualisiert werden. Gemessen wurde die Ausbreitungsgeschwindigkeit über die Lauflänge $\boldsymbol{c_2 = f(\ell)}$. Außerdem konnte festgestellt werden, dass die Strömungsquerschnittsfläche des Freistrahls in seinem Verlauf erwartungsgemäß trompetenartig zunimmt.
Über eine nichtlineare Regression mit PTC-MathCad Prime 3.1 wurden aus den Versuchsdaten folgende strömungskinetischen Parameter bestimmt:

$$\boldsymbol{\lambda_{Diss} = 0{,}042}$$
$$\boldsymbol{\eta_{TW} = 3.285 \cdot 10^{-5}\ \text{Pa s}}$$
$$\boldsymbol{a = 0{,}023}$$
$$\boldsymbol{b = 1{,}216}$$

Die Berechnung des Freistrahlgeschwindigkeitsverlaufes auf der Grundlage dieser Kinetik ergab eine sehr gute Übereinstimmung der theoretischen mit den gemessenen Werten. Weitere Vorausberechnungen zeigten, dass der Freistrahl im Labormaßstab bereits nach einer Lauflänge von **0,52 m** zur Ruhe kommt.
Die Maßstabsübertragung der Ergebnisse auf die technische Freistrahlanlage BANT 1 im Banter See Wilhelmshaven erbrachte, dass im isothermen Fall nach **16,1 m** der Freistrahl zur Ruhe kommen wird. Im Vergleich zum Labormaßstab entspricht das einem Maßstabsverhältnis von **1:30**. Auch wenn bei der Maßstabsübertragung in der Verfahrenstechnik meist größere Verhältnisse auftreten, wird die Ausbreitung des Freistrahl über **52 m** hinaus nicht erwartet und es kann davon ausgegangen werden, dass das Wirken des Freistrahls in einem größeren Gewässer stets lokal sehr begrenzt bleibt.

10. Symbolverzeichnis

Symbole

A	Fläche	m²
a, b	strömungskinetische Parameter des Strömungsgebietes	-
c	Geschwindigkeit	m/s
d	Durchmesser	m
$e_{Diss,12}$	spezifische Dissipationsnergie	J/kg
F	Kraft	N
g	Erdbeschleunigung	m/s²
$\dot{I}$	Impulsstrom	N
K_1	strömungskinetische Konstante	-
ℓ,	Länge eines Bilanzgebietes	m
ℓ_R	Länge des Leitrohres der Freistrahlanlage	m
m	Masse	kg
$\mathring{m}$	Massenstrom	kg/s
P	Momentanleistung	kW
r	Radius	m
Re	REYNOLDS-Zahl	-
T	Temperatur	°C
t	Zeit	s
V	Volumen	m³
$\mathring{V}$	Volumenstrom	m³/s
x	Laufstrecke des Freistrahls	m
x, y	x- ,y-Koordinaten	

griechische Symbole

α	Neigungswinkel der Freistrahlflanken	°
Δ	Differenz	-
η	dynamische Viskosität	Pa s
ρ	Dichte	kg/m³
λ	Rohrreibungszahl	-
τ	Schubspannung	N/m²

Indices oben

$\bar{x}$	Mittelwert
$\vec{x}$	Vektor

Indices unten

Diss	Dissipation
ges	gesamt
M	Mantel des Zylinders
R	Reibung
T	turbulent
wW, kW, W	warmes Wasser, kaltes Wasser, Wasser
max	maximal
0,1,2, 12	axiale Grenzen der Bilanzgebiete, Bilanzgebiet ① → ②
x, y	in x-, y-Richtung
G, τ	auf Erdbeschleunigung, Reibung bezogen

11. Literatur

/1/ Lücking/Liesegang/Scheltwort: Freistrahl-Anlagen im Banter See, Abschlussbericht Technik, Januar 2013
http://evu.jade-hs.de/system/files/Abschlussbericht%20Freistrahlanlagen%20Banter%20See%20Technik_2.pdf
Anhang:
Freistrahlanlagen im Banter See, Abschluss-berichte

/2/ Liebezeit, G.: MarChemConsult, Varel
Ökologische Begleituntersuchungen zum Einsatz von Freistrahlanlagen im Banter See, Jahresberichte 2008-2012, Abschlussbericht 2013
http://evu.jade-hs.de/system/files/Banter%20See%20Abschlu%C3%9Fbericht%20%C3%96kologie.pdf

/3/ Michele, J.; Michele, V.: The free jet as a means to improve water quality Destratification and oxygen enrichment
Limnologica 32(2002) 329 - 337
Urban & Fischer Verlag

/4/ Truckenbrodt, E.: Fluidmechanik
Berlin, 1992

/5/ Perry, R.F.: Handbook of Chemical Engineering
New York, 1997

/6/ Lücking, P.; Michele, J.: “Lake Bant”: A five year project to solve cyanobacterial problems
Jade Hochschule, Wilhelmshaven
Sept. 2015
https://www.researchgate.net/publication/281714490_Lake_Bant_A_five_year_project_to_solve_cyanobacterial_problems

/7/	Winter, B.:	Beitrag zur mathematisch-physikalischen Modellierung von Freistrahlanlagen für die Gewässerbelüftung (Teil 1), 2012 persönliche Homepage, Jade Hochschule, Publikationen http://www.jade-hs.de?id=8326 oder: Books on Demand ISBN 978-3-8482-2139-4
/8/	Winter, B.:	Beitrag zur Bewertung der Freistrahlanlagen im Banter See Wilhelmshaven im Zusammenhang mit dem Wettergeschehen, Jahre 2007 bis 2011, 2012 persönliche Homepage, Jade Hochschule, Publikationen http://www.jade-hs.de?id=8326
/9/	Manzenrieder, H.:	Ingenieurbüro Dr.-Ing. Manzenrieder und Partner Banter See - Ergebnisse und Messprogramme 2011-2014 Bericht Nr. 307, 2014 Auftrageber: GGS Wilhelmshaven
/10/	Sigloch, H.:	Technische Fluidmechanik VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, 1996 ISBN 3-18-4401523-8
/11/	Bohl, W.:	Technische Strömungslehre Kamprath-Reihe Vogel Buchverlag, 9. Auflage 1991 ISBN 3-8023-0036-X
/12/	Hartmann, K.; u.a.:	Prozessverfahrenstechnik Reihe Verfahrenstechnik Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1979 Leipzig
/13/	Kuhlmann, H.:	Strömungsmechanik Pearson Studium 2007 München ISBN 978-3-8273-7230-7
/14/	Cerbe, G.; Wilhelms, G.:	Technische Thermodynamik Hanser Verlag München, 2013 ISBN 978-3-446-43638-1
/15/	Adolphi, G.; u.a.:	Lehrbuch der chemischen Verfahrenstechnik Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Leipzig, 1968
/16/	Wronberg, F.:	Bachelorarbeit Jade Hochschule, Studienort Wilhelmshaven, 01.10.2013 Strömungskinetische Untersuchungen zur Ermittlung der Energiedissipation von Freistrahlen

12. Anhang

PTC- MathCad Prime 3.1-Datei:
Freistrahl-Regression-5-Wronberg-V2-02.07.13.mcdx

MathCad-Ausdruck Seite 1:

Auswertung des Labor-Freistrahl-Versuches "Wronberg-V2-02.07.13" mittels nichtlinearer Regression
Verfahrenstechnische Modellierung des Freistrahls über die Energie- und Impulsbilanz sowie die Kontinuitätsgleichung

- Funktion **$c_2 = f(l)$**:

$$c_2 := \frac{\left(\frac{1}{3}\left(1+\frac{r_1}{a\cdot l^b+r_1}+\left(\frac{r_1}{a\cdot l^b+r_1}\right)^2\right)-\frac{2\cdot r_1\cdot l\cdot \eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\left(a\cdot l^b+r_1\right)^2\cdot\rho_W}\right)\cdot c_1+\left(\frac{l\cdot\lambda_{Diss}-4\cdot\left(2\cdot r_1+a\cdot l^b\right)}{4\cdot\left(2\cdot r_1+a\cdot l^b\right)+l\cdot\lambda_{Diss}}+\left(\frac{r_1}{a\cdot l^b+r_1}\right)^2\right)\cdot c_1^{\,2}}{-\frac{2\cdot c_1\cdot l\cdot\lambda_{Diss}}{4\cdot\left(2\cdot r_1+a\cdot l^b\right)+l\cdot\lambda_{Diss}}+\frac{2\cdot r_1\cdot l\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\left(a\cdot l^b+r_1\right)^2\cdot\rho_W}+1}$$

- partielle Ableitung der Funktion nach **λ_{Diss}**: Achtung: Wegen Druck Umformatierung!

$$\frac{d}{d\lambda_{Diss}}c_2 = \frac{\left(\frac{2\cdot l\cdot c_1}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}-\frac{2\cdot l^2\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{\left(8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}\right)^2}\right)\cdot\left(\left(\frac{r_1^{\,2}}{\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b-l\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}\right)\cdot c_1^{\,2}+\left(\frac{r_1}{3\cdot r_1+3\cdot a\cdot l^b}+\frac{r_1^{\,2}}{3\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot c_1\right)}{\left(\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+1\right)^2}+$$

$$+\frac{c_1^{\,2}\cdot\left(\frac{l}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+\frac{l\cdot\left(8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b-l\cdot\lambda_{Diss}\right)}{\left(8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}\right)^2}\right)}{\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+1}$$

- partielle Ableitung der Funktion nach **η_{WT}**: Achtung: Wegen Druck Umformatierung!

$$\frac{d}{d\eta_{WT}}c_2 = -\frac{2\cdot l\cdot c_1\cdot r_1}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2\cdot\left(\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+1\right)}-\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\left(\left(\frac{r_1^{\,2}}{\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b-l\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}\right)\cdot c_1^{\,2}+\left(\frac{r_1}{3\cdot r_1+3\cdot a\cdot l^b}+\frac{r_1^{\,2}}{3\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot c_1\right)}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2\cdot\left(\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+1\right)^2}$$

MathCad-Ausdruck Seite 2:

- partielle Ableitung der Funktion nach **a**: Achtung: Wegen Druck Umformatierung!

$$\frac{d}{da}c_2 = \frac{\left(\left(\frac{r_1^2}{\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b-l\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}\right)\cdot c_1^2+\left(\frac{r_1}{3\cdot r_1+3\cdot a\cdot l^b}+\frac{r_1^2}{3\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot c_1\right)\cdot\left(\frac{4\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^3}-\frac{8\cdot l\cdot l^b\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{\left(8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}\right)^2}+\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a^2\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}\right)}{\left(\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+1\right)^2}+$$

$$-\frac{\left(\frac{4\cdot l^b}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+\frac{2\cdot l^b\cdot r_1^2}{\left(r_1+a\cdot l^b\right)^3}-\frac{4\cdot l^b\cdot\left(8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b-l\cdot\lambda_{Diss}\right)}{\left(8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}\right)^2}\right)\cdot c_1^2+\left(\frac{3\cdot l^b\cdot r_1}{\left(3\cdot r_1+3\cdot a\cdot l^b\right)^2}+\frac{2\cdot l^b\cdot r_1^2}{3\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^3}-\frac{4\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^3}-\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a^2\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}\right)\cdot c_1}{\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+1}$$

- partielle Ableitung der Funktion nach **b**: Achtung: Wegen Druck Umformatierung!

$$\frac{d}{db}c_2 = \frac{\left(\left(\frac{r_1^2}{\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b-l\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}\right)\cdot c_1^2+\left(\frac{r_1}{3\cdot r_1+3\cdot a\cdot l^b}+\frac{r_1^2}{3\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot c_1\right)\cdot\left(\frac{4\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}\cdot\ln(l)}{\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^3}-\frac{8\cdot a\cdot l\cdot l^b\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}\cdot\ln(l)}{\left(8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}\right)^2}+\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}\cdot\ln(l)}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}\right)}{\left(\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+1\right)^2}-$$

$$+\frac{\left(\frac{4\cdot a\cdot l^b\cdot\ln(l)}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+\frac{2\cdot a\cdot l^b\cdot r_1^2\cdot\ln(l)}{\left(r_1+a\cdot l^b\right)^3}-\frac{4\cdot a\cdot l^b\cdot\ln(l)\cdot\left(8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b-l\cdot\lambda_{Diss}\right)}{\left(8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}\right)^2}\right)\cdot c_1^2+\left(\frac{3\cdot a\cdot l^b\cdot r_1\cdot\ln(l)}{\left(3\cdot r_1+3\cdot a\cdot l^b\right)^2}+\frac{2\cdot a\cdot l^b\cdot r_1^2\cdot\ln(l)}{3\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^3}-\frac{4\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}\cdot\ln(l)}{\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^3}-\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}\cdot\ln(l)}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}\right)\cdot c_1}{\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+1}$$

- Eingabe: **$F(l, \lambda_{Diss}, \eta_{WT}, a, b) = c_2 = f(l)$**

partielle Ableitung nach **λ_{Diss}**
partielle Ableitung nach **η_{WT}**
partielle Ableitung nach **a**
partielle Ableitung nach **b**

$c_1 := 1$ m/s $\quad r_1 := 5\cdot 10^{-4}$ m $\quad \rho_W := 1000$ kg/m³

MathCad-Ausdruck Seite 3:

$F(l,\lambda_{Diss},\eta_{WT},a,b):=$

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\left(1+\frac{r_1}{a\cdot l^b+r_1}+\left(\frac{r_1}{a\cdot l^b+r_1}\right)^2\right)-\frac{2\cdot r_1\cdot l\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\left(a\cdot l^b+r_1\right)^2\cdot\rho_W}\right)\cdot c_1+\left(\frac{l\cdot\lambda_{Diss}-\cdots}{4\cdot\left(2\cdot r_1+\cdots\right.}\right.\cdots}{-\frac{2\cdot c_1\cdot l\cdot\lambda_{Diss}}{4\cdot\left(2\cdot r_1+a\cdot l^b\right)+l\cdot\lambda_{Diss}}+\frac{2\cdot r_1\cdot l\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\left(a\cdot l^b+r_1\right)^2\cdots}\cdots}$$

$$\frac{\left(\frac{2\cdot l\cdot c_1}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}-\frac{2\cdot l^2\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{\left(8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}\right)^2}\right)\cdot\left(\left(\left(\frac{r_1^2}{\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b-l\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}\right)\cdot c_1^2+\left(\frac{r_1}{3\cdot r_1+3\cdot a\cdot l^b}+\frac{r_1^2}{3\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}\cdots\right.\right.\right.}{\left(\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+1\right)^2}$$

$$-\frac{2\cdot l\cdot c_1\cdot r_1}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2\cdot\left(\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+1\right)}-\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\left(\left(\left(\frac{r_1^2}{\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b-\cdots}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+\cdots}\right.\right.\right.\cdots}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot\cdots\right.}$$

$$\frac{\left(\left(\frac{r_1^2}{\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b-l\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}\right)\cdot c_1^2+\left(\frac{r_1}{3\cdot r_1+3\cdot a\cdot l^b}+\frac{r_1^2}{3\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot c_1\right)\cdot\left(\frac{4\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^3}-\frac{8\cdot l\cdot l^b\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{\left(8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}\right)^2}+\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a^2\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}\right)}{\left(\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+1\right)^2}-\left(\frac{\cdots}{8\cdot r_1\cdots}\right.\cdots$$

$$\frac{\left(\left(\frac{r_1^2}{\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b-l\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}\right)\cdot c_1^2+\left(\frac{r_1}{3\cdot r_1+3\cdot a\cdot l^b}+\frac{r_1^2}{3\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot c_1\right)\cdot\left(\frac{4\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}\cdot\ln(l)}{\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^3}-\frac{8\cdot a\cdot l\cdot l^b\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}\cdot\ln(l)}{\left(8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}\right)^2}+\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}\cdot\ln(l)}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}\right)}{\left(\frac{2\cdot l\cdot r_1\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\rho_W\cdot\left(r_1+a\cdot l^b\right)^2}-\frac{2\cdot l\cdot c_1\cdot\lambda_{Diss}}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b+l\cdot\lambda_{Diss}}+1\right)^2}-\left(\frac{4\cdot a\cdot l^b\cdot\cdots}{8\cdot r_1+4\cdot a\cdot l^b\cdots}\right.\cdots$$

- Funktionswerte:

$$l:=\begin{bmatrix}0\\0.005\\0.01\\0.02\\0.04\\0.06\\0.09\\0.1\\0.11\\0.12\\0.14\\0.2\\0.3\\0.4\\0.5\end{bmatrix}+0.002\ \text{m}\qquad c_2:=\begin{bmatrix}1\\0.91\\0.87\\0.71\\0.57\\0.44\\0.32\\0.31\\0.29\\0.27\\0.23\\0.16\\0.09\\0.04\\0.01\end{bmatrix}\ \text{m/s}$$

MathCad-Ausdruck Seite 4:

- Startvektor für **λDiss**, **ηWT**, **a** und **b**:

$$u := \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.0001 \\ 0.01 \\ 1.2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{\lambda_{Diss}} \\ \boldsymbol{\eta_{WT}} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix}$$

- Regression:

$$Lösung := \text{genfit}(l, c_2, u, F)$$

$$Lösung = \begin{bmatrix} 0.042 \\ 3.285 \cdot 10^{-5} \\ 0.023 \\ 1.216 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{\lambda_{Diss}} \\ \boldsymbol{\eta_{WT}} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix}$$

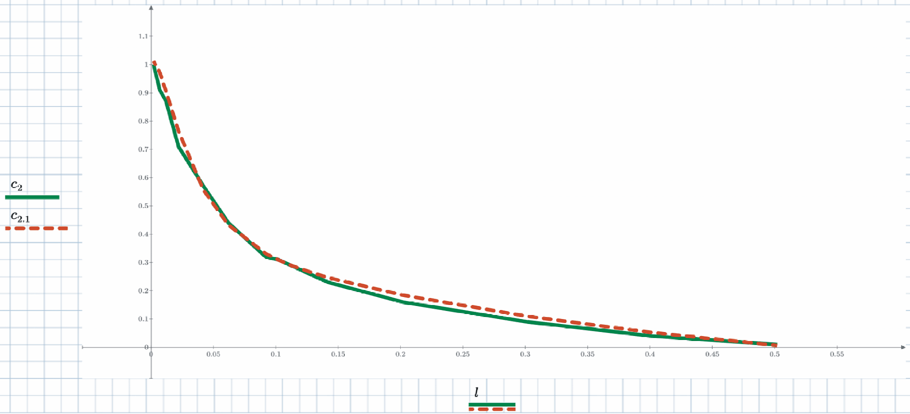
- Rückrechnung:

$\lambda_{Diss} := 0.042$ $\quad a := 0.023$

$\eta_{WT} := 3.285 \cdot 10^{-5}$ $\quad b := 1.216$

$$c_{2.1} := \frac{\left(\frac{1}{3}\left(1 + \frac{r_1}{a \cdot l^b + r_1} + \left(\frac{r_1}{a \cdot l^b + r_1}\right)^2\right) - \frac{2 \cdot r_1 \cdot l \cdot \eta_{WT}}{a \cdot l^b \cdot \left(a \cdot l^b + r_1\right)^2 \cdot \rho_W}\right) \cdot c_1 + \left(\frac{l \cdot \lambda_{Diss} - 4 \cdot \left(2 \cdot r_1 + a \cdot l^b\right)}{4 \cdot \left(2 \cdot r_1 + a \cdot l^b\right) + l \cdot \lambda_{Diss}} + \left(\frac{r_1}{a \cdot l^b + r_1}\right)^2\right) \cdot c_1^2}{-\frac{2 \cdot c_1 \cdot l \cdot \lambda_{Diss}}{4 \cdot \left(2 \cdot r_1 + a \cdot l^b\right) + l \cdot \lambda_{Diss}} + \frac{2 \cdot r_1 \cdot l \cdot \eta_{WT}}{a \cdot l^b \cdot \left(a \cdot l^b + r_1\right)^2 \cdot \rho_W} + 1}$$

$$l = \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.007 \\ 0.012 \\ 0.022 \\ 0.042 \\ 0.062 \\ 0.092 \\ 0.102 \\ 0.112 \\ 0.122 \\ 0.142 \\ 0.202 \\ 0.302 \\ 0.402 \\ 0.502 \end{bmatrix} \text{ m} \qquad c_{2.1} = \begin{bmatrix} 1.012 \\ 0.972 \\ 0.905 \\ 0.765 \\ 0.556 \\ 0.433 \\ 0.331 \\ 0.309 \\ 0.29 \\ 0.274 \\ 0.246 \\ 0.184 \\ 0.109 \\ 0.052 \\ 0.006 \end{bmatrix} \text{ m/s}$$

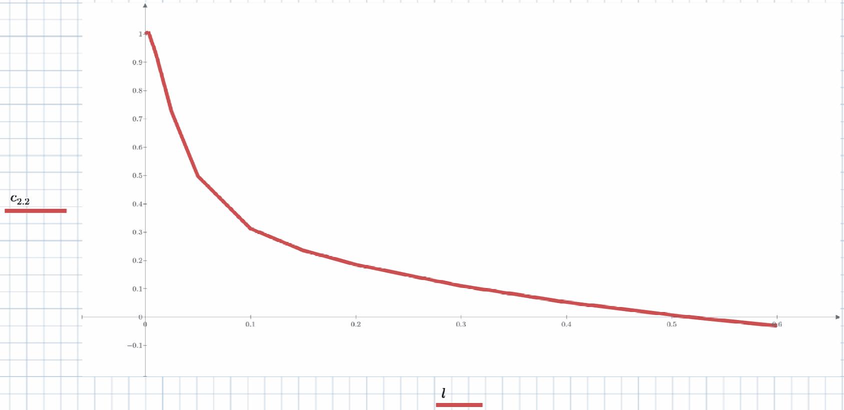


MathCad-Ausdruck Seite 5:

- Vorausberechnung:

$$l := \begin{bmatrix} 0 \\ 0.003 \\ 0.01 \\ 0.025 \\ 0.05 \\ 0.1 \\ 0.15 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.52 \\ 0.6 \end{bmatrix} \mathrm{m}$$

$$c_{2.2} := \frac{\left(\frac{1}{3}\left(1+\frac{r_1}{a \cdot l^b + r_1}+\left(\frac{r_1}{a \cdot l^b + r_1}\right)^2\right)-\frac{2 \cdot r_1 \cdot l \cdot \eta_{WT}}{a \cdot l^b \cdot \left(a \cdot l^b + r_1\right)^2 \cdot \rho_W}\right) \cdot c_1 + \left(\frac{l \cdot \lambda_{Diss} - 4 \cdot \left(2 \cdot r_1 + a \cdot l^b\right)}{4 \cdot \left(2 \cdot r_1 + a \cdot l^b\right) + l \cdot \lambda_{Diss}} + \left(\frac{r_1}{a \cdot l^b + r_1}\right)^2\right) \cdot {c_1}^2}{-\frac{2 \cdot c_1 \cdot l \cdot \lambda_{Diss}}{4 \cdot \left(2 \cdot r_1 + a \cdot l^b\right) + l \cdot \lambda_{Diss}} + \frac{2 \cdot r_1 \cdot l \cdot \eta_{WT}}{a \cdot l^b \cdot \left(a \cdot l^b + r_1\right)^2 \cdot \rho_W} + 1}$$



c_2 = 0 bei l = 0,52 m

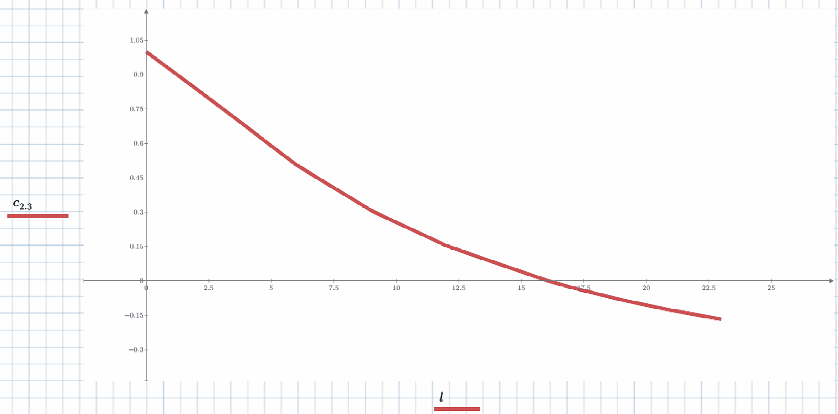
MathCad-Ausdruck Seite 6:

- Maßstabsübertragung:

$r_1 := 0.7$ m

$$l := \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \\ 16 \\ 17 \\ 19 \\ 21 \\ 23 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$c_{2.3} := \frac{\left(\frac{1}{3}\left(1+\frac{r_1}{a\cdot l^b+r_1}+\left(\frac{r_1}{a\cdot l^b+r_1}\right)^2\right)-\frac{2\cdot r_1\cdot l\cdot \eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\left(a\cdot l^b+r_1\right)^2\cdot\rho_W}\right)\cdot c_1+\left(\frac{l\cdot\lambda_{Diss}-4\cdot\left(2\cdot r_1+a\cdot l^b\right)}{4\cdot\left(2\cdot r_1+a\cdot l^b\right)+l\cdot\lambda_{Diss}}+\left(\frac{r_1}{a\cdot l^b+r_1}\right)^2\right)\cdot c_1^{\,2}}{-\frac{2\cdot c_1\cdot l\cdot\lambda_{Diss}}{4\cdot\left(2\cdot r_1+a\cdot l^b\right)+l\cdot\lambda_{Diss}}+\frac{2\cdot r_1\cdot l\cdot\eta_{WT}}{a\cdot l^b\cdot\left(a\cdot l^b+r_1\right)^2\cdot\rho_W}+1}$$



c_2 = 0 bei l = 16,1 m